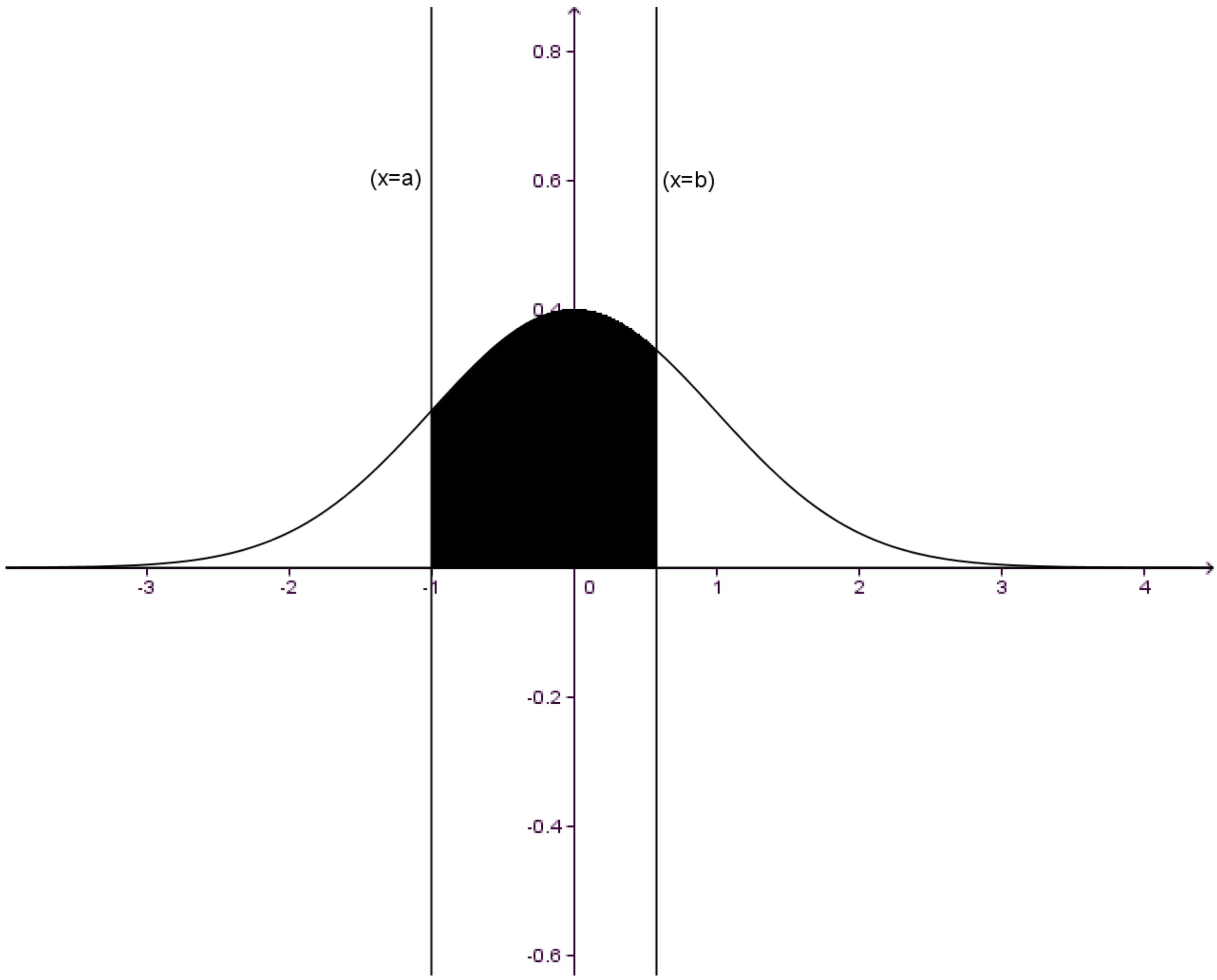
Résumé sur les lois normales

1) X suit la loi normale réduite centrée N(0 ;1)

signifie que pour tous réels a et b on a p(X ϵ [a ;b]) = $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$
ce qui s'interprète géométriquement comme l'aire sous la courbe représentative de f et sur l'intervalle [a ;b] où f est définie par *f(x)* =$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$:
On a p(X ϵ [a ;b]) = p(X ϵ]a ;b]) = p(X ϵ [a ;b[ ) = p(X ϵ]a ;b[ )

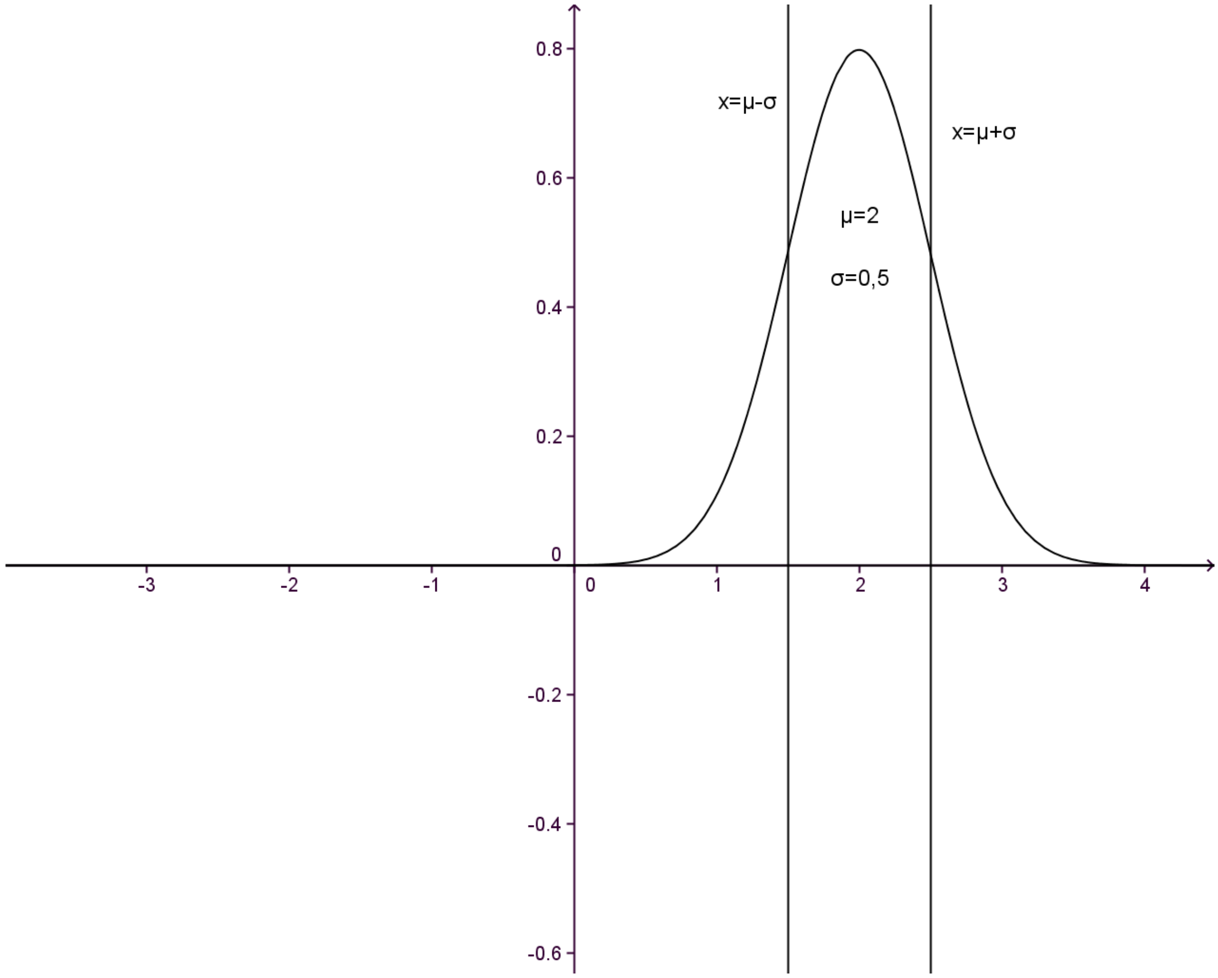


2) Y suit la normale N(μ; σ^2) signifie que X = $\frac{Y-\mu}{\sigma}$ suit la loi N(0 ;1).

p(Y ϵ [a ;b]) = p(X ϵ [$\frac{a-\mu}{\sigma}$; $\frac{b-\mu}{\sigma}$]) ce qui s'interprète géométriquement comme l'aire sous la courbe représentative de f.

<u>hors programme</u>

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$



Si X suit la loi normale centrée réduite N(0,1) et Y suit la loi normale N($\mu;\sigma^2$) alors :

3) p(Y ϵ $[\mu-\sigma\ ;\mu+\sigma]$ = p(X ϵ [-1; 1]) = $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}dx$ ≈0,68

p(Y ϵ $[\mu-2\sigma\ ;\mu+2\sigma]$ = p(X ϵ [-2; 2]) = $\int_{-2}^{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}dx \approx 0{,}954$

p(Y ϵ $[\mu-3\sigma\ ;\mu+3\sigma]$ = p(X ϵ [-3; 3]) = $\int_{-3}^{3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}dx$ ≈ 0,997

4) E(Y) = μ et en particulier E(X)=0.
V(Y) = σ^2 et en particulier V(X)=1.

5) Il y a un et seul réel positif u_α tel que p(- u_α ≤ X ≤ u_α) = 1-α où α ϵ]0 ; 1[.
En particulier pour α = 0,05 on a u_α ≈ 1,96.
C'est-à-dire p(-1,96 ≤ X ≤ 1,96) = 0,95
Remarquez que l'on a dans ce cas :
p(-u_α ≤ X ≤ u_α) =2 p(0 ≤ X ≤ u_α) = 1 -2 p(X ≤ -u_α) pour des raisons de symétrie

6)Avec la calculatrice :
<u>TI</u>
normalcdf (accessible par 2de VARS)
normalcdf(a,b, μ,σ)= p(Y ϵ [a ;b])
normalcdf(a,b, $0, 1$)= p(X ϵ [a ;b])
pour avoir p(X ≤ b) on prend a=-10^{99}
pour avoir p(X ≥ a) on prend b=10^{99}

Soit β ∈ $[0{,}1]$
invNorm(β,μ,σ) donne le nombre b tel que p(Y ≤ b) = β
invNorm(β, $0, 1$) donne le nombre b tel que p(X ≤ b) = β
Par exemple pour avoir b ≥0 tel que p(-b ≤ X ≤ b) = 0.95
On écrit p(-b ≤ X ≤ b) = 1 - 2 p(X ≤—b) = 0,95

donc p(X ≤−b) = $\frac{0.05}{2}$ =0.025 et –b = invNorm(0.025,0,1) = -1,9599.. soit b = 1,9599..

CASIO

C'est le même principe

Menu STAT puis DIST puis NORM

ensuite soit Ncd et il faut compléter lower upper σ et μ et après execute (qui correspond à normacdf de la TI)

soit InvN (qui correspond àinvNorm de la TI sauf qu'il y a plus de choix)

pour avoir la même chose que invNorm(0,025,0,1) de la TI il faut faire

Tail sur left Area =0.025 upper $\sigma = 1$ et μ = 0

En mettant Tail sur right on obtient directement 1,9599.. car donne b tel que p(X≥b)=0.025

Exemple

Durée de vie d'un appareil

La durée de vie d'un certain type d'appareil est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne et d'écart-type inconnus. Les spécifications impliquent que 80 % de la production des appareils ait une durée de vie entre 120 et 200 jours et que 5% de la production ait une durée de vie inférieure à 120 jours.

1. Quelles sont les valeurs de μ et σ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir un appareil dont la durée de vie soit comprise entre 200 jours et 230 jours ?

Solution

1. On note X la variable durée de vie. Les spécifications se traduisent par :

$\mathrm{p}(120 \leq X \leq 200) = 0{,}8$ et $\mathrm{P}(X < 120) = 0{,}05$.

Soit Z = $(X-\mu)/\sigma$ alors Z suit la loi normale centrée réduite et on a

p($Z \in [\frac{120-\mu}{\sigma}\ ;\ \frac{200-\mu}{\sigma}]$) =p(Z < $\frac{200-\mu}{\sigma}$) – p($Z <$ $\frac{120-\mu}{\sigma}$) = 0,8

p(Z < $\frac{120-\mu}{\sigma}$) = 0,05

Soit p($Z <$ $\frac{120-\mu}{\sigma}$) = 0,05 et p(Z < $\frac{200-\mu}{\sigma}$) = 0,85

On trouve alors avec la calculatrice $\frac{120-\mu}{\sigma}$ = -1,65 et $\frac{200-\mu}{\sigma} = 1{,}04$

Soit μ = 120 + 1,65σ et $\mu = 200 - 1{,}04\,\sigma$ et donc

μ = 169 et $\sigma = 29{,}74$

2. $\mathrm{p}(200 \leq X \leq 230) \approx 0{,}13$ avec la calculatrice