Contrôle 6 T S

Février 2018

EXERCICE 1 (8 points)

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiple). Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera SUR la copie le numéro de la question et la réponse choisie ~~en~~ justifiant le choix

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Soit z un nombre complexe de la forme $x + iy$, où x et y sont des réels.

1. Soit z le nombre complexe d'affixe $(1+i)^4$. L'écriture exponentielle de z est :
   - **a.** $\sqrt{2}e^{i\pi}$
   - **b.** $4e^{i\pi}$
   - **c.** $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
   - **d.** $4e^{i\frac{\pi}{4}}$
2. L'ensemble des points M du plan d'affixe $z = x + iy$ tels que $|z-1+i| = \left|\sqrt{3}-i\right|$ a pour équation :
   - **a.** $(x-1)^2+(y+1)^2 = 2$
   - **b.** $(x+1)^2+(y-1)^2 = 2$
   - **c.** $(x-1)^2+(y+1)^2 = 4$
   - **d.** $y = x + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$
3. On considère la suite de nombres complexes (Z_n) définie pour tout entier naturel n par $Z_0 = 1+i$ et $Z_{n+1} = \frac{1+i}{2}Z_n$. On note M_n le point du plan d'affixe Z_n.
   - **a.** Pour tout entier naturel n, le point M_n appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.
   - **b.** Pour tout entier naturel n, le triangle OM_nM_{n+1} est équilatéral.
   - **c.** La suite (U_n) définie par $U_n = |Z_n|$ est convergente.
   - **d.** Pour tout entier naturel n, un argument de $\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_n}$ est $\frac{\pi}{2}$.
4. Soit A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives :

   $$Z_A = -1-i \quad ; \quad Z_B = 2-2i \quad \text{et} \quad Z_C = 1+5i.$$

   On pose $Z = \dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$.
   - **a.** Z est un nombre réel.
   - **b.** Le triangle ABC est isocèle en A.
   - **c.** Le triangle ABC est rectangle en A.
   - **d.** Le point M d'affixe Z appartient à la médiatrice du segment [BC].

Exercice 2 (12 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.
On considère l'équation

$$(E): \quad z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
2. On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geqslant 1$.
   a. Vérifier que z_1 est une solution de (E).
   b. Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.
   c. Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sur la figure donnée en annexe et tracer, sur la figure donnée en annexe, les segments $[M_1, M_2]$, $[M_2, M_3]$ et $[M_3, M_4]$.
3. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $z_n = 2^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n \mathrm{i}}{2}\right)$.
4. Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3.

   Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.
5. On note $\ell^n = M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_nM_{n+1}$.
   a. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\ell^n = 2\sqrt{3}\,(2^n - 1)$.
   b. Déterminer le plus petit entier n tel que $\ell^n \geqslant 1000$.*

ANNEXE

Exercice 2