$\boxed{S}$ Mai 2018 (3h)

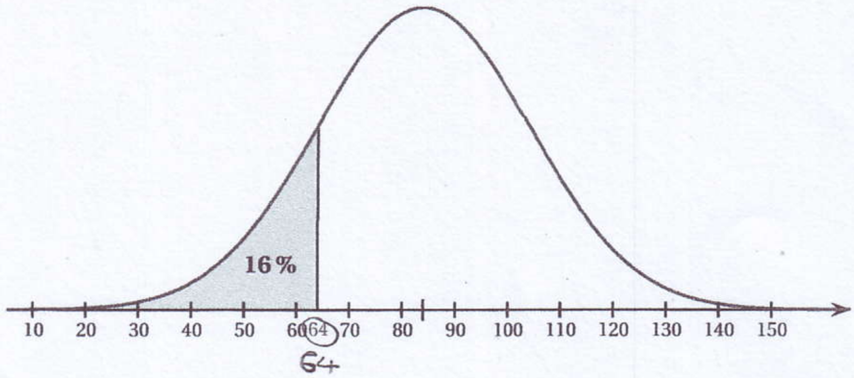
EXERCICE 1 (7 points)

Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A Étude de la durée de vie d'un appareil électroménager

Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un type de lave-vaisselle par une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de moyenne $\mu = 84$ et d'écart-type σ. De plus, on a $P(X \leqslant 64) = 0,16$.
La représentation graphique de la fonction densité de probabilité de X est donnée ci-dessous.



1. **a.** En exploitant le graphique, déterminer $P(64 \leqslant X \leqslant 104)$.

   b. Quelle valeur approchée entière de σ peut-on proposer ?

2. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{X - 84}{\sigma}$.

   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par Z ?

   b. Justifier que $P(X \leqslant 64) = P\left(Z \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}\right)$.

   c. En déduire la valeur de σ, arrondie à 10^{-3}.

3. Dans cette question, on considère que $\sigma = 20,1$.
   Les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3}.

   a. Calculer la probabilité que la durée de vie du lave-vaisselle soit comprise entre 2 et 5 ans.

   b. Calculer la probabilité que le lave-vaisselle ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

Partie B Étude de l'extension de garantie d'El'Ectro

Le lave-vaisselle est garanti gratuitement pendant les deux premières années.
L'entreprise El'Ectro propose à ses clients une extension de garantie de 3 ans supplémentaires.
Des études statistiques menées **sur les clients qui prennent l'extension de garantie** montrent que 11,5 % d'entre eux font jouer l'extension de garantie.

1. On choisit au hasard 12 clients parmi ceux ayant pris l'extension de garantie (on peut assimiler ce choix à un tirage au hasard avec remise vu le grand nombre de clients).

   a. Quelle est la probabilité qu'exactement 3 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Détailler la démarche en précisant la loi de probabilité utilisée. Arrondir à 10^{-3}.

   b. Quelle est la probabilité qu'au moins 6 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Arrondir à 10^{-3}.

2. L'offre d'extension de garantie est la suivante : pour 65 euros supplémentaires, El'Ectro remboursera au client la valeur initiale du lave-vaisselle, soit 399 euros, **si une panne irréparable survient entre le début de la troisième année et la fin de la cinquième année**. Le client ne peut pas faire jouer cette extension de garantie si la panne est réparable.
   On choisit au hasard un client parmi les clients ayant souscrit l'extension de garantie, et on note Y la variable aléatoire qui représente le gain algébrique en euros réalisé sur ce client par l'entreprise El'Ectro, grâce à l'extension de garantie.

   a. Justifier que Y prend les valeurs 65 et -334 puis donner la loi de probabilité de Y.

   b. Cette offre d'extension de garantie est-elle financièrement avantageuse pour l'entreprise ? Justifier.

EXERCICE 2 (6 points)

Commun à tous les candidats

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Dans les questions **1.** et **2.**, le plan est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

1. **Affirmation 1 :**
   Le point d'affixe $(-1+i)^{10}$ est situé sur l'axe imaginaire.
2. **Affirmation 2 :**
   Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation
   $$z - \overline{z} + 2 - 4i = 0$$
   admet une solution unique.
3. **Affirmation 3 :**
   $\ln\left(\sqrt{e^7}\right) + \dfrac{\ln\left(e^9\right)}{\ln\left(e^2\right)} = \dfrac{e^{\ln 2 + \ln 3}}{e^{\ln 3 - \ln 4}}$
4. **Affirmation 4 :**
   $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x + 2}\,dx = -\ln\left(\frac{3}{5}\right)$
5. **Affirmation 5 :**
   L'équation $\ln(x-1) - \ln(x+2) = \ln 4$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3 (7 points)

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On donne les points $A(1\,;0\,;-1)$, $B(1\,;2\,;3)$, $C(-5\,;5\,;0)$ et $D(11\,;1\,;-2)$.
Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].
Le point K est défini par $\overrightarrow{BK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. **a.** Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
   b. Démontrer que les points I, J et K définissent un plan.
   c. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(3\,;1\,;4)$ est un vecteur normal au plan (IJK).
   En déduire une équation cartésienne de ce plan.
2. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x + y + 4z - 8 = 0$.
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BD).
   b. Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ et la droite (BD) sont sécants et donner les coordonnées de L, point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (BD).
   c. Le point L est-il le symétrique du point D par rapport au point B ?