

## Partie A

$$1) \forall x \in [0; 4] \quad h'(x) = 1 - e^x$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$$

2)

|         |           |            |            |
|---------|-----------|------------|------------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$        | $+\infty$  |
| $h'(x)$ | $+$       | $0$        | $-$        |
| $h$     |           | $\nearrow$ | $\searrow$ |
| $h(x)$  |           | $-$        |            |

## Partie B

$$1) \forall x \in \mathbb{R} \quad b'(x) = -(-e^{-x}(x+1) + e^{-x}) = -(-xe^{-x}) = \boxed{x e^{-x}}$$

qui est du signe de  $x$  sur  $\mathbb{R}$  car  $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-x} > 0$

|         |           |       |           |
|---------|-----------|-------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$   | $+\infty$ |
| $b'(x)$ | $-$       | $0$   | $+$       |
| $b$     | $+\infty$ | $e-1$ | $e$       |

$$b(x) = -e^{-x}(x+1) + e \rightarrow \boxed{+\infty} \text{ quand } x \rightarrow -\infty$$

$\downarrow$   $\downarrow$   
 $+\infty$   $-\infty$   
 par complé

$$b(x) = -\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} + e \rightarrow \boxed{e} \text{ quand } x \rightarrow +\infty$$

$\downarrow$   $\downarrow$   
 $0$   $0$

$$2) \text{ TA a pour équation } y = b'(-1)(x+1) + b(-1) \quad \begin{aligned} b'(-1) &= -e \\ b(-1) &= e \end{aligned}$$

$$= -e(x+1) + e$$

$$\boxed{y = -ex} \quad (\text{TA passe donc l'origine})$$

|        |       |     |
|--------|-------|-----|
| $x$    | $0$   | $4$ |
| $b(x)$ | $e-1$ | $e$ |

$\nearrow \approx 2,5$

$\approx 1,7$

Si  $x \in [0; 4]$  alors  $b(x) \in [b(0); b(4)]$   
 mais  $b(0) > 0$  et  $b(4) < 4$   
 donc  $b(x) \in [0; 4]$

$$4) \cdot g'(x) = b'(x) - 1 = x e^{-x} - 1 = \frac{x}{e^x} - 1 = \frac{x - e^x}{e^x} = \frac{h(x)}{e^x}$$

qui est du signe de  $h$  sur  $[0; 4]$  car  $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$

|         |            |            |
|---------|------------|------------|
| $x$     | $0$        | $4$        |
| $g'(x)$ | $-$        | $-$        |
| $g$     | $\nearrow$ | $\searrow$ |

$\approx 1,7$   $\approx -1,3$

$$\boxed{2,4 \leq x \leq 2,5}$$

avec la calculatrice

( $h < 0$  sur  $[0; 4]$ )

Sur  $[0; 4]$ ,  $g$  est continue et strictement décroissante et comme  $0$  est compris entre  $g(4) < 0$  et  $g(0) > 0$ , alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $g(x) = 0$  n'a qu'une seule solution, dans  $[0; 4]$



## Partie C

- 1)  $(u_n)$  semble converger vers l'abscisse du point d'intersection de  $\mathcal{C}_f$  avec  $\Delta$  (d'équation  $y=x$ )  
 (Cet abscisse est donc solution de l'équation  $f(x)=x$  soit  $g(x)=0$ )  
 $(u_n)$  semble donc converger vers  $\alpha$  de la vertu B

- 2) Notons  $P(n)$  la proposition " $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ "

Démontrons par récurrence que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $P(n)$  est vraie

• Initialisation

$P(0)$ : " $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$ " vraie car  $u_0=0$  et  $u_1=f(u_0)=f(0) \approx 1,7$

• Hérédité

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , Supposons  $P(n)$  vraie, démontrons qu'alors  $P(n+1)$  est vraie, c'est à dire  $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$  (C)

Or, par hypothèse on a  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$  et comme  $f$  est strictement croissante sur  $[0, 4]$ , on en déduit que

$$0 \leq \underbrace{f(0)}_{\approx 1,7} \leq \underbrace{f(u_n)}_{u_{n+1}} \leq \underbrace{f(u_{n+1})}_{u_{n+2}} \leq \underbrace{f(4)}_{\approx 2,6} \leq 4$$

donc  $P(n+1)$  est vraie

• Conclusion

$P(n)$  est vraie au rang initial 0 et est héréditaire, donc elle est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$

- 3) D'après 2),  $(u_n)$  est croissante et majorée par 4, donc  $(u_n)$  converge vers  $l$ . ( $l \leq 4$ )

De plus  $l$  est solution de l'équation  $\underbrace{f(x)=x}_{g(x)=0}$  dans  $[0, 4]$ ,

donc  $\boxed{l = \alpha}$  (B) 4))



