

- 
1.
    1. Quel est le reste de la division euclidienne de  $6^{10}$  par 11 ? Justifier.
    2. Quel est le reste de la division euclidienne de  $6^4$  par 5 ? Justifier.
    3. En déduire que  $6^{40} \equiv 1 [11]$  et que  $6^{40} \equiv 1 [5]$ .
    4. Démontrer que  $6^{40} - 1$  est divisible par 55.

2. Dans cette question  $x$  et  $y$  désignent des entiers relatifs.

1. Montrer que l'équation

$$(E) \quad 65x - 40y = 1$$

n'a pas de solution.

2. Montrer que l'équation

$$(E') \quad 17x - 40y = 1$$

admet au moins une solution.

3. Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation  $(E')$ .

4. Résoudre l'équation  $(E')$ .

En déduire qu'il existe un unique naturel  $x_0$  inférieur à 40 tel que

$$17x_0 \equiv 1 [40].$$

3. Pour tout entier naturel  $a$ , démontrer que si  $a^{17} \equiv b [55]$  et si  $a^{40} \equiv 1 [55]$ , alors  $b^{33} \equiv a [55]$ .

---