Contrôle n°1 de septembre 2014 Terminale S

Partie A :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0
On rappelle que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_0 \text{x} q^n$
Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_0 et q et en déduire le sens de variations de (u_n) dans les cas suivants :

1) $0<q<1$ et $u_0>0$
2) $0<q<1$ et $u_0<0$
3) $q>1$ et $u_0>0$
4) $q>1$ et $u_0<0$

Partie B :

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n. \end{cases}$$

1. a. Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

b. D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2. a. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a

$$u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^n.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3. *On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite* (u_n).
Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10 \times 0,5^n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n).

b. En déduire, que pour tout entier naturel n,

$$u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n.$$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n)

4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leqslant 0,01$.

SUPPRIMÉE

Entrée :	n et u sont des nombres	
Initialisation :	n prend la valeur 0	
	u prend la valeur 2	
Traitement :	Tant que ...	(1)
	n prend la valeur ...	(2)
	u prend la valeur ...	(3)
	Fin Tant que	
Sortie :	Afficher n	

Contrôle n° 1 Correction succincte

(Exercice juin 2014 Antilles - Guyane)

Partie A

- $u_{n+1} - u_n = q u_n - u_n = (q-1) u_n = (q-1) u_0 q^n$

Dans les cas proposés on a $q^n > 0$ donc le signe de $u_{n+1} - u_n$ est celui de $u_0(q-1)$.

q	$0<q<1$	$q>1$
$u_0>0$	$(u_n) \searrow$	$(u_n) \nearrow$
$u_0<0$	$(u_n) \nearrow$	$(u_n) \searrow$

Partie B (Antilles guyane)

1] a)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3,4	2,18	1,19	0,61	0,31	0,16	0,08	0,04

b) (u_n) semble décroissante à partir du rang 1

2] a) Soit $P(n)$ la proposition << $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$ >>

initialisation $P(1)$: << $\underbrace{u_1}_{3,4} \geqslant \underbrace{\frac{15}{4} \times 0{,}5}_{1,875}$ >> VRAIE

hérédité Soit n un entier quelconque, $n \geqslant 1$

Supposons $P(n)$ vraie : $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$ (HR)

démontrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie : $u_{n+1} \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^{n+1}$ (C)

On a

$u_{n+1} = \frac{1}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n \geqslant \frac{3}{4} \times 0{,}5^n + 3 \times 0{,}5^n$ d'après (HR)

or $\frac{3}{4} \times 0{,}5^n + 3 \times 0{,}5^n = \frac{15}{4} \times 0{,}5^n \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^{n+1}$

car $0{,}5^n \geqslant 0{,}5^{n+1}$ d'après la partie A

donc $u_{n+1} \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^{n+1}$ (C)

conclusion

La proposition $P(n)$ est vraie au rang initial 1 et est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{5}u_n + 3\times 0{,}5^n\right) - u_n$

$$= -\frac{4}{5}u_n + 3\times 0{,}5^n$$

mais $u_n \geq \frac{15}{4}\times 0{,}5^n$ d'après 2) a)

donc $-\frac{4}{5}u_n \leq -3\times 0{,}5^n$

et donc $u_{n+1} - u_n = -\frac{4}{5}u_n + 3\times 0{,}5^n \leq 0$

---

c) D'après 2) b) (u_n) est décroissante à partir du rang 1 et est minorée par 0 d'après 2) a), en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n \geq \frac{15}{4}\times 0{,}5^n \geq 0$ et $u_0 \geq 0$

Donc (u_n) est convergente

3] a) $v_{n+1} = u_{n+1} - \underbrace{10\times 0{,}5^{n+1}}_{5\times 0{,}5^n} = \frac{1}{5}u_n + 3\times 0{,}5^n - 5\times 0{,}5^n = \frac{1}{5}u_n - 2\times 0{,}5^n$

d'où $v_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n - 10\times 0{,}5^n) = \frac{1}{5}v_n$ et cela pour tout $n \in \mathbb{N}$

donc (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et de 1er terme $v_0 = u_0 - 10$
$= -8$

---

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad v_n = -8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n$

et $u_n = v_n + 10\times 0{,}5^n = -8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n + 10\times 0{,}5^n$

---

c) $0 < \frac{1}{5} < 1$ et $0 < 0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(0{,}5^n) = 0$

et au final $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = 0$
