Exercice 1

On considère l'équation notée (G)

$$3x^2 + 7y^2 = 10^{2n} \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

1. Montrer que $100 \equiv 2$ (modulo 7).
   Démontrer que si $(x\ ;\ y)$ est solution de (G) alors $3x^2 \equiv 2^n$ (modulo 7).
2. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7.							

3. Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.
   En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution.

Exercice 2

1. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2 009 par 11.
2. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2^{10} par 11.
3. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2^{2009} + 2009$ par 11.

Exercice 3

Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.
On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$.
On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.

1. Vérifier que $10^3 \equiv -1$(modulo 7).
2. En déduire tous les nombres entiers N cherchés.