Correction contrôle 1 septembre 2016 TS

Exercice 1

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \dfrac{3}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$

Partie A : Conjecture

1. $u_1 = -\dfrac{1}{2}u_0^2 + 3u_0 - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2}2^2 + 3\times 2 - \dfrac{3}{2} = -2 + 6 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$

   $u_2 = -\dfrac{1}{2}u_1^2 + 3u_1 - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + 3\times\dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{25}{8} + \dfrac{15}{2} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{23}{8} = 2{,}875$

2. En programmant à la calculatrice la fonction f définie par $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x - \dfrac{3}{2}$, on obtient :

   $u_3 = f(u_2) = f\left(\dfrac{23}{8}\right) = \dfrac{383}{128} \approx 2{,}99219$ et $u_4 = f(u_3) = f\left(\dfrac{383}{128}\right) \approx 2{,}99997$

3. On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et qu'elle converge vers 3.

Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n - 3$.

1. $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = -\dfrac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \dfrac{3}{2} - 3 = -\dfrac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \dfrac{9}{2}$

   $v_n^2 = (u_n - 3)^2 = u_n^2 - 6u_n + 9$ donc $-\dfrac{1}{2}v_n^2 = -\dfrac{1}{2}\left(u_n^2 - 6u_n + 9\right) = -\dfrac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \dfrac{9}{2} = v_{n+1}$

   On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\dfrac{1}{2}v_n^2$.

2. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.

   - $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$ donc $-1 \leqslant v_0 \leqslant 0$; la propriété est vraie au rang 0.
   - Supposons la propriété vraie au rang $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $-1 \leqslant v_p \leqslant 0$.

     On sait que, pour tout p, $v_{p+1} = -\dfrac{1}{2}v_p^2$.

     $-1 \leqslant v_p \leqslant 0 \Longrightarrow 0 \leqslant v_p^2 \leqslant 1 \Longrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant -\dfrac{1}{2}v_p^2 \leqslant 0 \Longrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant v_{p+1} \leqslant 0$

     Donc $-1 \leqslant v_{p+1} \leqslant 0$ et donc la propriété est vraie au rang $p+1$.
   - La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire ; donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

   Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$

3. **a.** Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} - v_n = -\dfrac{1}{2}v_n^2 - v_n = -v_n\left(\dfrac{1}{2}v_n + 1\right)$

   b. Pour tout n, $v_n \leqslant 0$ donc $-v_n \geqslant 0$.

   Pour tout n, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$ donc $-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}v_n \leqslant 0$ et donc $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}v_n + 1 \leqslant 1$; donc $\dfrac{1}{2}v_n + 1 > 0$.

   $$\left.\begin{array}{l} -v_n \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{2}v_n + 1 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow -v_n\left(\dfrac{1}{2}v_n + 1\right) \geqslant 0 \iff v_{n+1} - v_n \geqslant 0$$

   Pour tout n, $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$, donc la suite (v_n) est croissante.

4. La suite (v_n) est croissante et majorée par 0 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (v_n) est convergente.

5. On note ℓ limite de la suite (v_n). On admet que $\ell \in [-1\,;\,0]$ et vérifie l'égalité : $\ell = -\dfrac{1}{2}\ell^2$.

   On résout l'équation $x = -\dfrac{1}{2}x^2$ dont ℓ est solution :

   $x = -\dfrac{1}{2}x^2 \iff 2x + x^2 = 0 \iff x(2+x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -2$

   Mais on sait que $\ell \in [-1;0]$ donc ne peut pas correspondre à $x = -2$.

   Donc $\ell = 0$ et la limite de la suite (v_n) est 0.

6. La suite (v_n) est croissante et, pour tout n, $u_n = v_n + 3$; donc on peut dire que la suite (u_n) est croissante.

   La suite (v_n) est convergente vers 0 donc, d'après les théorèmes sur les limites, on peut dire que la suite (u_n) est convergente vers 3.

   Les conjectures faites dans la **partie A** sont donc validées.

Exercice 2

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	k et p sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement :	Affecter à u la valeur 5 Pour k variant de 1 à p Affecter à u la valeur $0,5u+0,5(k-1)-1,5$ Fin de pour
Sortie :	Afficher u

valeur de k	1	2	
valeur de u	5	1	$-0,5$

On obtient en sortie : $-0,5$.

Partie B

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5.$$

1. Algorithme modifié :

Variables :	k et p sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement :	Affecter à u la valeur 5 Pour k variant de 1 à p Affecter à u la valeur $0,5u+0,5(k-1)-1,5$ Afficher u
Sortie :	Fin de pour

2. Puisque $u_4 > u_3$ la suite (u_n) n'est pas décroissante, du moins pas avant le rang 4.
3. *Initialisation* On vient de voir que $u_4 > u_3$: la relation est vraie pour $n = 3$.
   Hérédité On suppose qu'il existe un naturel p tel que $u_{p+1} > u_p$.
   D'où $0,5u_{p+1} > 0,5u_p$; D'autre part : $p+1 > p \Rightarrow 0,5(p+1) > 0,5p$ d'où par somme des ces deux dernières inégalités :
   $0,5u_{p+1} + 0,5(p+1) > 0,5u_p + 0,5p$ et en ajoutant $-1,5$ à chaque membre :
   $0,5u_{p+1} + 0,5(p+1) - 1,5 > 0,5u_p + 0,5p - 1,5$ soit $u_{p+2} > u_{p+1}$: la relation est vraie au rang $p+1$.
   On a donc démontré que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$ ce qui montre que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 4.
4. Pour tout naturel n, on a :
   $v_{n+1} = 0,1u_{n+1} - 0,1(n+1) + 0,5 = 0,1u_{n+1} - 0,1n + 0,4 = 0,1(0,5u_n + 0,5n - 1,5) - 0,1n + 0,4 = 0,05u_n + 0,05n - 0,15 - 0,1n + 0,4 = 0,05u_n - 0,05n + 0,25 = 0,5(0,1u_n - 0,1n + 0,5) = 0,5v_n$: la suite (v_n) rdy donc géométrique de raison 0,5.
   Le premier terme est :
   $v_0 = 0,1 \times 5 - 0,1 \times 0 + 0,5 = 1$.
   On a donc pour tout naturel n, $v_n = 1 \times 0,5^n = 0,5^n = \dfrac{1}{2^n}$.
5. On a $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5 \iff 0,5^n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5 \iff 10 \times 0,5^n = u_n - n + 5 \iff u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5$.
6. Comme $-1 < 0,5 < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$ et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. La suite (u_n) ne converge pas.