Correction du contrôle n°1 $T^{le}S$

1. La fonction f est définie sur I car $-4 \notin I$. Elle est dérivable sur I en tant que fonction rationnelle et pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = \frac{3(x+4)-(3x+2)}{(x+4)^2} = \frac{10}{(x+4)^2} > 0$$

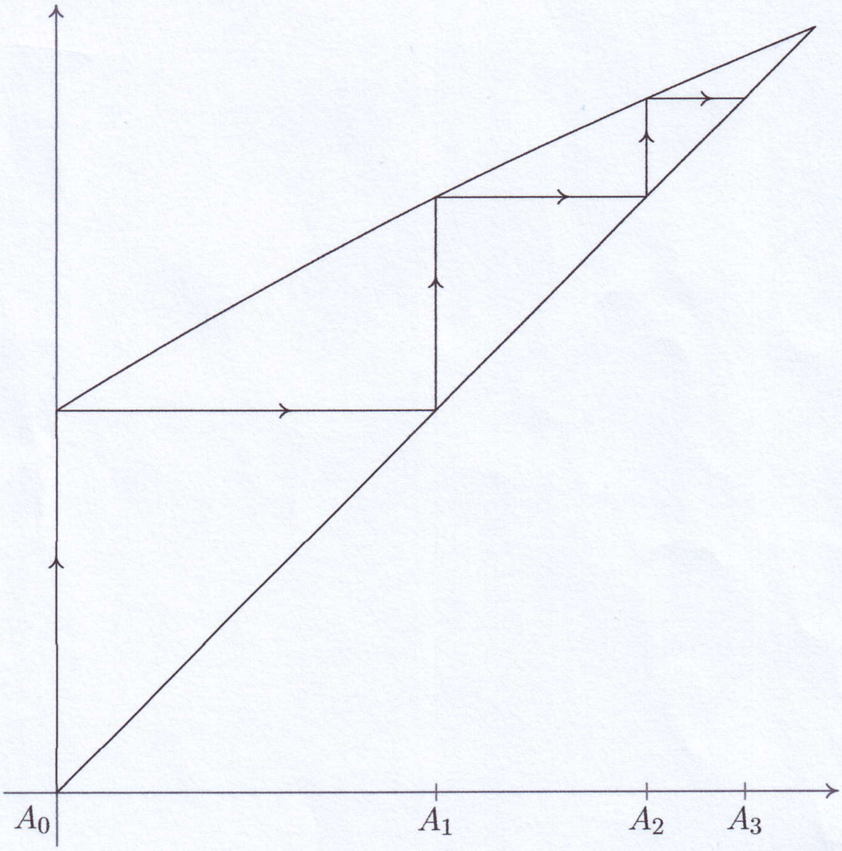
Puisque f' est strictement positive, f est strictement croissante sur I.

x	0		1
f	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1

On en déduit que pour tout $x \in I$, on a $f(x) \in I$. car $[1/2 ; 1] \subset [0;1]$ et $f([0;1]) = [1/2;1]$

2. On procède par récurrence sur n.
   - Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 0 \in I$ et la propriété est vérifiée.
   - Supposons que pour un entier n donné on ait $u_n \in I$. Nous savons que $u_{n+1} = f(u_n)$ et en appliquant la résultat de la question précédente, nous obtenons $u_{n+1} \in I$.
   - Conclusion : pour tout $n \geqslant 0$, on a $u_n \in I$.

3. (a) Représentation graphique.



(b) On peut conjecturer que (u_n) est croissante et convergente vers 1 .

(c) Calculons la différence :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n+2}{u_n+4} - u_n = \frac{3u_n + 2 - u_n^2 - 4u_n}{u_n+4} = \frac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n+4} = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$$

Puisque pour tout n , on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, on en déduit $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Par conséquent la suite (u_n) est croissante.

(d) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 : elle est donc convergente vers un réel l.
De plus $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ implique $0 \leqslant l \leqslant 1$.

(e) Nous savons $\lim u_{n+1} = \lim u_n = l$.

admis

D'autre part f est continue sur I et en appliquant le théorème sur la limite de la composée d'une suite et d'une fonction continue, on obtient : $\lim f(u_n) = f(l)$.
On en déduit $\boxed{l = f(l)}$. Résolvons cette équation :

$$l = \frac{3l+2}{l+4} \iff l^2 + l - 2 = 0$$

Cette équation a deux solutions évidentes : 1 et -2 .
Puisque $l \in I$, nous en déduisons $\boxed{l = 1}$.

4. (a) On calcule v_{n+1} en fonction de v_n :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{3u_n+2-(u_n+4)}{3u_n+2+2(u_n+4)} = \frac{2u_n-2}{5u_n+10} = \frac{2}{5} \cdot \frac{u_n-1}{u_n+2} = \frac{2}{5} \cdot v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

(b) On a $v_0 = \dfrac{u_0-1}{u_0+2} = -\dfrac{1}{2}$ et d'après le cours $\boxed{v_n = -\dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$.

(c) On remarque d'abord : $v_n = 1 - \dfrac{3}{u_n+2} \iff \dfrac{3}{u_n+2} = 1 - v_n$

On en déduit : $u_n + 2 = \dfrac{3}{1-v_n} \iff u_n = \dfrac{3}{1-v_n} - 2 = \dfrac{1+2v_n}{1-v_n}$.

D'où le résultat : $\boxed{u_n = \dfrac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n}}$.

(d) Sachant $-1 < \dfrac{2}{5} < 1$, on a $\lim \left(\dfrac{2}{5}\right)^n = 0$ et les théorèmes usuels sur les limites nous permettent de conclure que $\boxed{\lim u_n = 1}$.