C4 — Décembre 2017 — TaS

Exercice 1

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2 + e^x > 0$ d'où les variations de g sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
g	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

$\left(\begin{array}{ll} \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty & \text{car } \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty & \text{car } \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \end{array} \right)$

g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et 0 appartient à l'image de $\mathbb{R}$ par g qui est $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ n'a qu'une seule solution, notée α.

$\boxed{-0{,}36 < \alpha < -0{,}35}$

On en déduit le signe de g :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

2) a) $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2 + e^x > 0$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$

b) Posons $X = x^2 + e^x$ $\lim\limits_{x \to -\infty} X = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$

c) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \dfrac{2x + e^x}{x^2 + e^x} = \dfrac{g(x)}{x^2 + e^x}$ qui est du signe de g sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$\alpha \approx -0{,}35$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$ ↘	$\approx -0{,}19$	↗ $+\infty$

d) $\ln\left(1 + \dfrac{x^2}{e^x}\right) = \ln\left(\dfrac{e^x + x^2}{e^x}\right) = \ln(e^x + x^2) - \ln(e^x) = f(x) - x$

Posons $X = 1 + \dfrac{x^2}{e^x}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} X = 1$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$ $\left(\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty\right)$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{X \to 1} \ln X = 0$ et donc la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$

3) a) Voir graphique*, la suite (u_n) semble croissante

(*) la droite (d) doit être tracée pour pouvoir représenter les premiers termes de (u_n)

b) $P(n)$ « $0 \leq u_n \leq u_{n+1}$ »

- $P(0)$ vraie car $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = f(1) \approx 1{,}31$
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ vraie : « $0 \leq u_n \leq u_{n+1}$ » (HR)

démontrons qu'alors $P(n+1)$ vraie « $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2}$ » (C)

Comme f est croissante sur $[\alpha, +\infty[$ et à fortiori sur $[0, +\infty[$ car $\alpha < 0$, par passage à f, de l'hypothèse de récurrence, on en déduit que :

$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ ce qu'il fallait démontrer.

$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2}$

- La proposition $P(n)$ est vraie au rang initial 0 et est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque On en déduit (u_n) est croissante, de plus (u_n) est minorée par $u_0 = 1$

Si (u_n) avait une limite finie ℓ, alors $\ell \geq 1$ et ℓ solution de l'équation $f(x) = x$

or $f(x) = x \Leftrightarrow \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{e^x}\right) = 0 \Leftrightarrow 1 + \dfrac{x^2}{e^x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$ mais $\ell \neq 0$ car $\ell \geq 1$

→ donc (u_n) diverge vers $+\infty$ car elle est croissante et ne converge pas

Exercice 2

1) Posons $g(x) = x - \ln x$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
g	||	$\searrow$	1	$\nearrow$	
$g(x)$	||		$+$		

2) $$f(x) = \frac{x\left(1 + \frac{\ln x}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)} = \frac{1 + \frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{\ln x}{x}}$$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1}$

pour $x \neq 1$ $$f(x) = \frac{\ln x\left(\frac{x}{\ln x} + 1\right)}{\ln x\left(\frac{x}{\ln x} - 1\right)} = \frac{\frac{x}{\ln x} + 1}{\frac{x}{\ln x} - 1}$$ or $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x}{\ln x} = 0$ car $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$, donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -1}$

3) $\forall x > 0$ $$f'(x) = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)(x - \ln x) - \left(1 - \frac{1}{x}\right)(x + \ln x)}{(x - \ln x)^2} = \frac{\cancel{x} + 1 - \ln x - \cancel{\frac{\ln x}{x}} \cancel{- x} + 1 - \ln x + \cancel{\frac{\ln x}{x}}}{(x - \ln x)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{(x - \ln x)^2}}$$ qui est du signe de $1 - \ln x$ pour $x > 0$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-1	$\nearrow$		$\searrow$	1

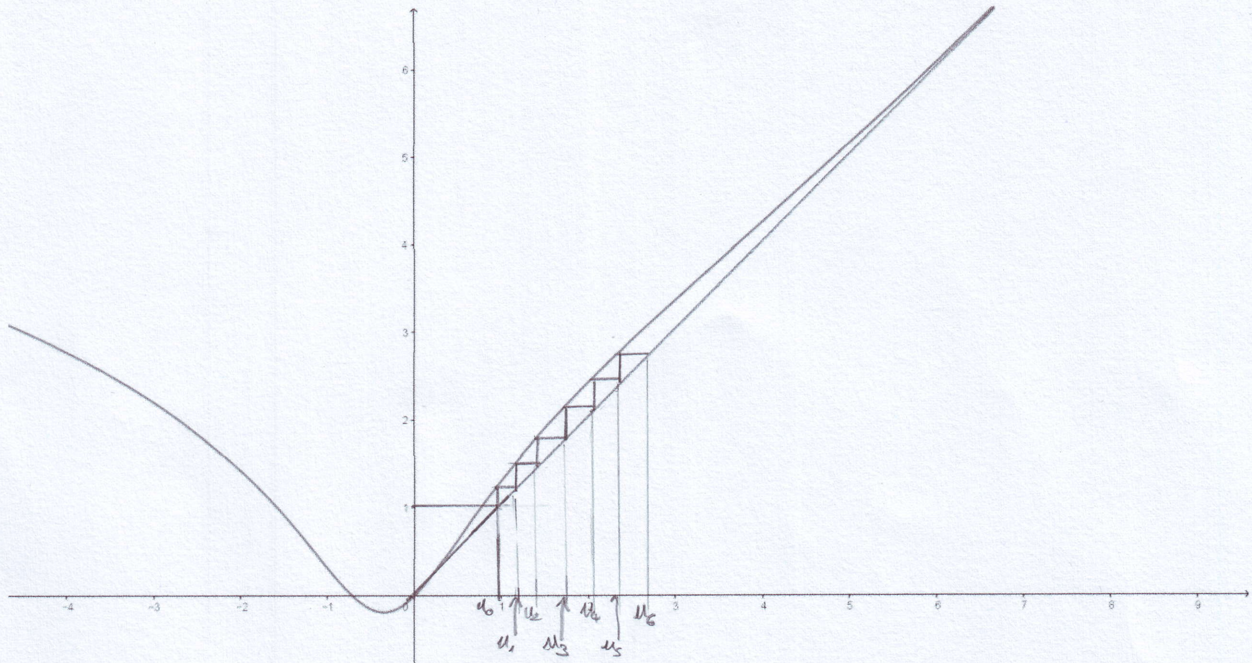
$$\begin{pmatrix} 1 - \ln x = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e \\ 1 - \ln x \geqslant 0 \iff \ln x \leqslant 1 \iff x \leqslant e \end{pmatrix}$$

$$f(e) = \frac{e+1}{e-1} \simeq 2{,}2$$

4) Il y a une asymtote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

Il y a une tangente horizontale au point d'abscisse e car $f'(e) = 0$

Annexe 1



Annexe 2