Contrôle 5 — Janvier 2018 — Tle S

Exercice 1.

1) On a $x^y = e^{y\ln x}$ et $y^x = e^{x\ln y}$ pour $x>0$ et $y>0$

donc $x^y = y^x \iff e^{y\ln x} = e^{x\ln y} \iff y\ln x = x\ln y \iff \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln y}{y}$

2) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$ (cours)

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} h(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$

b) $h'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$ qui est du signe de $1-\ln x$: $1-\ln x \geq 0 \iff \ln x \leq 1 \iff x \leq e$; $1-\ln x = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e$

x	0		e		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
h	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

$h(e) = \frac{1}{e}$ ($x_0 = e$ et $h(x_0) = \frac{1}{e}$)

c) $h(x) = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$ donc le point d'intersection de Cf avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $(1, 0)$

3) Variations de h sur $[1, +\infty[$

x	1	a	e	b	$+\infty$
h	0 ↗	λ ↗	$\frac{1}{e}$	↘ λ	↘ 0

Comme $\lambda \in]0; \frac{1}{e}[$, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur $]1, e[$ et sur $]e, +\infty[$, car h est continue et strictement monotone sur chaque intervalle.

Il n'existe donc qu'un seul réel $a \in]1, e[$ tel que $h(a) = \lambda$

et qu'un seul réel $b \in]e, +\infty[$ tel que $h(b) = \lambda$

4) $\lim\limits_{\substack{a \to 1 \\ >}} s(a) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{a \to e \\ <}} s(a) = e$

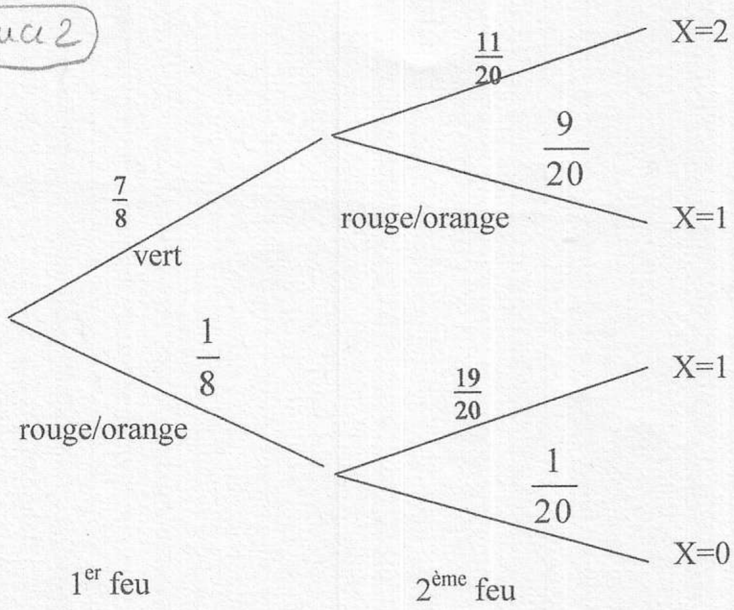
a	1		e
$s(a)$	‖ $+\infty$	↘	e ‖

5) $a \in]1, e[$, donc $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a = 2$ et dans ce cas $\lambda = \frac{\ln 2}{2}$

et $b = 4$ par lecture graphique $(2^4 = 4^2)$

Donc $(2;4)$ est le seul couple d'entiers solution de (E)

Exercice 2



Valeurs prises parX : x_i	0	1	2
Probabilités de « $X= x_i$ »	$\frac{1}{160}$	$1-\frac{78}{160}=\frac{82}{160}$	$\frac{7}{8}\times\frac{11}{20}=\frac{77}{160}$

$E(X) = \frac{82}{160} + 2\times\frac{77}{160} = \frac{236}{160} = \frac{59}{40}$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $p_{E_n}(E_{n+1}) = \frac{1}{20}$ $p_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) = \frac{9}{20}$

et comme $p_{n+1} = p(E_{n+1}) = p(E_{n+1} \cap E_n) + p(E_{n+1} \cap \overline{E_n})$ avec la formule des probabilités totales

$$= p(E_n) \times p_{E_n}(E_{n+1}) + p(\overline{E_n}) \times p_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$$
$$= p_n \times \frac{1}{20} + q_n \times \frac{9}{20}$$
$$= p_n \times \frac{1}{20} + (1 - p_n) \times \frac{9}{20}$$
$$= -\frac{2}{5} \times p_n + \frac{9}{20}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$u_{n+1} = 28\,p_{n+1} - 9$$
$$= 28(-\frac{2}{5} \times p_n + \frac{9}{20}) - 9$$
$$= -\frac{2}{5} \times 28\,p_n + \frac{63}{5} - 9$$
$$= -\frac{2}{5} \times 28\,p_n + \frac{18}{5}$$
$$= -\frac{2}{5}(28 \times p_n - 9)$$
$$= -\frac{2}{5} u_n$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $k = -\frac{2}{5}$ et de premier terme $u_1 = 28\times\frac{1}{8} - 9 = -5{,}5$

D'où $u_n = u_1 \times k^{n-1}$ et $p_n = \frac{1}{28}(u_n + 9)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Et comme (u_n) converge vers 0 car $k \in]-1\,;1[$ alors p_n converge vers $\frac{9}{28}$.