C6 Février 2018 Tle S

EXERCICE 1
Commun à tous les candidats (7 mars 2014)

1. $(1+i)^2 = 2i$, donc $(1+i)^4 = (2i)^2 = -4 = 4e^{i\pi}$. Réponse b.
2. En développant $|z-1+i|^2 = \left|\sqrt{3}-i\right|^2$, on obtient la réponse c.
3. On a $z_1 = \frac{1+i}{2} Z_0 = \frac{1+i}{2}(1+i) = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = i$.
   Donc $OM_1 = 1$: **a.** est faux, ainsi que **b.** puisque OM_0M_1 est rectangle.
   Enfin $\dfrac{Z_1 - Z_0}{Z_0} = \dfrac{-1}{1+i} = \dfrac{-1+i}{2}$ qui a pour argument $3\frac{\pi}{4}$.
   Il ne reste plus que la réponse c.
4. La figure montre rapidement que seule la réponse c. est la bonne.
   Vérification : $\overrightarrow{AB}\binom{3}{-1}$ et $\overrightarrow{AC}\binom{2}{6}$, d'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 6-6=0$.

---

2) Soit $z = x+iy$

$|\underbrace{z-1+i}_{(x-1)+i(y+1)}|^2 = |\sqrt{3}-i|^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2 = 4$

3) a) Fausse car $z_1 = i$ et $OM_1 = 1 \neq \sqrt{2}$ (contre-exemple)

b) Fausse, même contre-exemple $OM_1 = 1$ et $OM_0 = \sqrt{2}$

c) $U_n = |Z_n|$ or $Z_n = Z_0\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$

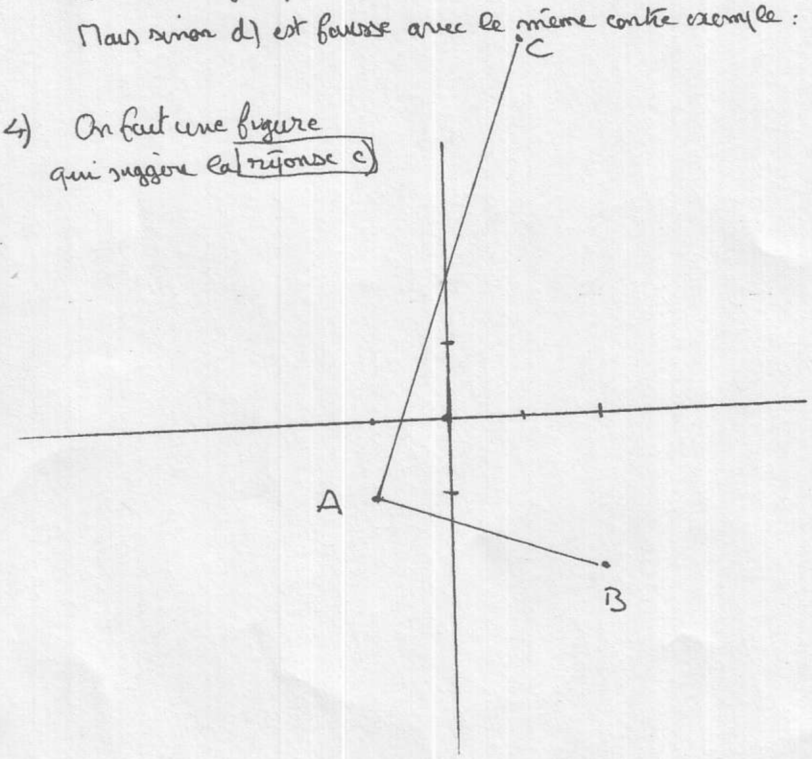
donc $|Z_n| = |Z_0|\left|\frac{1+i}{2}\right|^n = \sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \to 0$ car $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$

Vraie

Comme il n'y a qu'une seule bonne réponse, on ne considère pas d)

Mais sinon d) est fausse avec le même contre-exemple : $\frac{Z_1 - Z_0}{Z_0} = \frac{-1}{1+i} = -1+i$ d'argument $\frac{3\pi}{4}$

4) On fait une figure qui suggère la réponse c)



Exercice 2 (21 novembre 2013)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.
On considère l'équation (E) : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$.

1) On résout l'équation (E) : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$; $\Delta = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 12 - 16 = -4$.
L'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées :
$z' = \dfrac{-\left(-2\sqrt{3}\right) + \mathrm{i}\sqrt{4}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} + 2\,\mathrm{i}}{2} = \boxed{\sqrt{3} + \mathrm{i}}$ et $z'' = \boxed{\sqrt{3} - \mathrm{i}.}$

2) On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geqslant 1$.

a. $z_1 = 2^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1)^1 \frac{\pi}{6}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{6}} = 2\left(\cos\dfrac{-\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{-\pi}{6}\right) = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right) = \boxed{\sqrt{3} - \mathrm{i} = z''}$

Donc z_1 est solution de l'équation (E).

b. $z_2 = 2^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1)^2 \frac{\pi}{6}} = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right) = \boxed{2\sqrt{3} + 2\,\mathrm{i}}$

$z_3 = 2^3 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1)^3 \frac{\pi}{6}} = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{6}} = 8\left(\cos\dfrac{-\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{-\pi}{6}\right) = 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right) = \boxed{4\sqrt{3} - 4\,\mathrm{i}}$

c. $|z_1| = 2$ donc le point M_1 d'affixe z_1 est situé sur le cercle de centre O et de rayon 2; de plus, la partie imaginaire de z_1 est -1 donc le point M_1 est situé sur la droite d'équation $y = -1$. $\operatorname{Arg}(z_1) = -\frac{\pi}{6}$
Pour placer le point M_2, on utilise le fait que $|z_2| = 4$ et que $\operatorname{Im}(z_2) = 2$. $\operatorname{Arg}(z_2) = \frac{\pi}{6}$
Pour placer le point M_3, on utilise le fait que $|z_3| = 8$ et que $\operatorname{Im}(z_3) = -4$. $\operatorname{Arg}(z_3) = -\frac{\pi}{6}$
$z_4 = 2^4 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1)^4 \frac{\pi}{6}} = 16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$; pour placer le point M_4, on utilise le fait que $|z_4| = 16$; de plus $\arg(z_4) = \dfrac{\pi}{6} = \arg(z_2)$ donc les points O, M_2 et M_4 sont alignés donc $M_4 \in (OM_2)$. $z_4 = 8\sqrt{3} + 8i$ $\operatorname{Im}(z_4) = 8$ $\operatorname{Arg}(z_4) = \frac{\pi}{6}$
Voir la figure en annexe.

3) Si $n \geqslant 1$ et $\underline{n \text{ pair}}$, $\boxed{(-1)^n = +1}$, donc $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1)^n \frac{\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\mathrm{i}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n\,\mathrm{i}}{2}$.
Donc si $\underline{n \geqslant 1 \text{ pair}}$, $z_n = 2^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1)^n \frac{\pi}{6}} = 2^n\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n\,\mathrm{i}}{2}\right)$.

Si $\underline{n \text{ impair}}$, $\boxed{(-1)^n = -1}$, donc $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1)^n \frac{\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\mathrm{i}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n\,\mathrm{i}}{2}$.
Donc si $\underline{n \text{ impair}}$, $z_n = 2^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1)^n \frac{\pi}{6}} = 2^n\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n\,\mathrm{i}}{2}\right)$.

Donc pour tout entier $n \geqslant 1$, $z_n = 2^n\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n\,\mathrm{i}}{2}\right)$

4) $M_1M_2 = |z_2 - z_1| = \left|2\sqrt{3} + 2\,\mathrm{i} - \left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\right)\right| = \left|2\sqrt{3} + 2\,\mathrm{i} - \sqrt{3} + \mathrm{i}\right| = \left|\sqrt{3} + 3\,\mathrm{i}\right|$
$= \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = \boxed{2\sqrt{3}}$
$M_2M_3 = |z_3 - z_2| = \left|4\sqrt{3} - 4\,\mathrm{i} - \left(2\sqrt{3} + 2\,\mathrm{i}\right)\right| = \left|4\sqrt{3} - 4\,\mathrm{i} - 2\sqrt{3} - 2\,\mathrm{i}\right| = \left|2\sqrt{3} - 6\,\mathrm{i}\right|$
$= \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + (-6)^2} = \sqrt{12+36} = \sqrt{48} = \boxed{4\sqrt{3}} = 2^2\sqrt{3}$

Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.

5) On note $\ell_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_nM_{n+1}$.

a. D'après la question 4, $\ell_n = 2\sqrt{3} + 2^2\sqrt{3} + \cdots + 2^n\sqrt{3} = \left(2 + 2^2 + \cdots + 2^n\right)\sqrt{3}$
La suite (2^n) définie pour $n \geqslant 1$ est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $2^1 = 2$; la somme S de ses premiers termes consécutifs est donnée par la formule :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

donc $2 + 2^2 + \cdots 2^n = 2 \times \dfrac{1 - 2^n}{1-2} = 2 \times \dfrac{2^n - 1}{2-1} = 2\left(2^n - 1\right)$
$\ell_n = \left(2 + 2^2 + \cdots + 2^n\right)\sqrt{3} = \boxed{2\sqrt{3}\left(2^n - 1\right)}$

b. $\ell_n \geqslant 1000 \iff 2\sqrt{3}(2^n - 1) \geqslant 1000 \iff 2^n - 1 \geqslant \dfrac{1000}{2\sqrt{3}} \iff 2^n \geqslant \dfrac{1000}{2\sqrt{3}} + 1.$
La fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc
$\ell_n \geqslant 1000 \iff \ln(2^n) \geqslant \ln\left(\dfrac{1000}{2\sqrt{3}} + 1\right) \iff n\ln 2 \geqslant \ln\left(\dfrac{1000}{2\sqrt{3}} + 1\right) \underset{\ln 2 > 0}{\iff} n \geqslant \dfrac{\ln\left(\frac{1000}{2\sqrt{3}} + 1\right)}{\ln 2} \underset{n \in \mathbb{N}}{\iff} n \geqslant \boxed{9}$

ANNEXE

Exercice 2