Complément sur les matrices diagonalisables

Rappel : Une matrice carrée A est dite diagonalisable s'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A=PDP^{-1}$
ou encore AP=PD

Regardons le cas d'une matrice diagonalisable d'ordre 2
Ecrivons A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, D = $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et P = $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}$
On peut écrire $P=(C_1C_2)$ où C_1 et C_2 sont 2 matrices colonnes, non nulles car sinon le déterminant de P serait nulle et P ne serait pas inversible.
Démontrons que $AC_1=\lambda_1 C_1$ et de même $AC_2=\lambda_2 C_2$
AP=PD donne $\begin{pmatrix} au_1+bv_1 & au_2+bv_2 \\ cu_1+dv_1 & cu_2+dv_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 \end{pmatrix}$
or $AC_1=\begin{pmatrix} au_1+bv_1 \\ cu_1+dv_1 \end{pmatrix}$ et $\lambda_1 C_1=\begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 \\ \lambda_1 v_1 \end{pmatrix}$ qui sont exactement les premières colonnes des matrices égales ci-dessus, donc $AC_1=\lambda_1 C_1$.

De manière générale pour une matrice d'ordre n, si on note C_i la i-ième colonne de P et λ_i le i-ième élément de D on a :
$AC_i=\lambda_i C_i$
$AC_i=(\lambda_i Id)xC_i$
$(A-\lambda_i Id)C_i=0$
Il est donc nécessaire que la matrice carrée $A-\lambda_i Id$ ne soit pas inversible car sinon on aurait :
$C_i = (A-\lambda_i Id)^{-1}x0=0$, ce qui n'est pas le cas.
Mais dire que la matrice $A-\lambda_i Id$ n'est pas inversible signifie que son déterminant est nul.
Ainsi λ_i est solution de l'équation det(A- λ Id)=0 d'inconnue λ .
Par exemple, prenons A=$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ A- λId=$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ dont le déterminant est :$(5-\lambda)(-\lambda)+6$
or $(5-\lambda)(-\lambda)+6=0 \Leftrightarrow \lambda=2 \; ou \; \lambda=3$
On a donc D=$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
Remarques :
1) Les λ_i sont appelées valeurs propres de A
2) S'il n'y a pas de valeurs propres, c'est-à-dire si l'équation det(A- λ Id)=0 n'a pas de solution, alors A n'est pas diagonalisable.
C'est le cas de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
Mais attention, A peut avoir des valeurs propres sans pour autant être diagonalisable, c'est le cas de la matrice $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ qui n'est pas non plus inversible.
Il y a des matrices non inversibles qui sont diagonalisables comme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
On a $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

3) Une matrice d'ordre 2 qui admet 2 valeurs propres distinctes, est diagonalisable,
et la matrice D est constituée des valeurs propres sur la diagonale.
C'est le cas de $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
4) Une matrice symétrique est diagonalisable comme $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Reste à déterminer P, c'est-à-dire les colonnes C_i

Reprenons l'exemple A = $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

C_1 doit vérifier $AC_1=2C_1$

On obtient alors le système : $\begin{cases} 5u_1 - 6v_1 = 2u_1 \\ u_1 = 2v_1 \end{cases} \Leftrightarrow u_1 = 2v_1$

Il y a donc une infinité de matrices colonnes C_1 possibles, par exemple $C_1=\binom{2}{1}$

De même, comme $AC_2 = 3C_2$, on obtient :

$\begin{cases} 5u_2 - 6v_2 = 3u_2 \\ u_2 = 3v_2 \end{cases} \Leftrightarrow u_2 = 3v_2$

On peut prendre $C_2=\binom{3}{1}$

Au final, pour la matrice A = $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on trouve D = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et P = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

On remarque qu'il était possible de prendre une autre matrice P et aussi de prendre la matrice D = $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Mais dans tous les cas on a $A=PDP^{-1}$

Cas des matrices stochastiques

Une matrice carrée est dite stochastique quand tous ses coefficients sont positifs et la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1. (anti-stochastique quand la somme des coefficients de chaque colonne vaut 1)

La matrice de transition obtenue à partir d'une marche aléatoire ou d'un graphe probabiliste est une matrice stochastique.

Etudions le cas d'une telle matrice A d'ordre 2

A= $\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$ où a et b sont 2 réels compris entre 0 et 1.

$P(\lambda)$ =det$(A - \lambda I)$ = (a-λ)(b-λ)-(a-1)(b-1)

Ainsi 1 est une racine évidente de P.

L'autre racine est a+b-1.

Donc A admet 2 valeurs propres 1 et a+b-1, pas forcément distinctes.

Comme a et b sont compris entre 0 et 1, a+b-1 est compris entre -1 et 1.

1) a+b-1 =1 ⇔ a=b=1 ⇔ P n'a qu'une seule racine 1 ⇔ $A = Id$

2) a+b-1 = -1 ⇔ a=b=0 ⇔ P a deux racines 1 et -1 ⇔ A= $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

3) -1<a+b-1<1 ⇔ a et b sont strictement compris entre 0 et 1 ⇔ P a 2 racines, 1 et l'autre strictement entre -1 et 1
   et dans ce cas A a tous ses coefficients non nuls.

En ce qui concerne la convergence de la suite (A^n) :

Dans le premier cas (A^n) est stationnaire et vaut Id.

Dans le second cas A^n = Id quand n est pair et A^n = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ quand n est impair.

La suite (A^n) diverge car elle est périodique.

Dans le dernier cas, la suite (A^n) converge car tous ses coefficients sont de la forme $k+k'(a+b-1)^n$, où k et k' sont 2 réels, qui convergent vers k.

Dans les 3 cas, la matrice A est diagonalisable et c'est seulement quand -1 est valeur propre que la suite (A^n) diverge.

Dans le cas général (n>2), les choses se compliquent même si on retrouve certains résultats.
Par exemple 1 est valeur propre et toutes les valeurs propres, quand elles existent, sont comprises entre -1 et 1.
La convergence de (A^n) est assurée quand une puissance de A a tous ses coefficients non nuls, c'est-à-dire strictement positifs et dans ce cas (A^n) converge vers une matrice stochastique dont toutes les lignes sont égales[*] (c'est une conséquence du théorème de Perron-Frobenius)
Mais A n'est pas forcément diagonalisable.

[*]On peut aussi remarquer qu'une puissance d'une matrice A stochastique est stochastique, et si la suite (A^n) converge alors sa limite est une matrice stochastique.