Contrôle n°2 Octobre 2016

Exercice 1

Soit C la fonction définie sur [0 ; 2.5] par $C(x) = x^3 - 3x^2+x+3$

Partie A

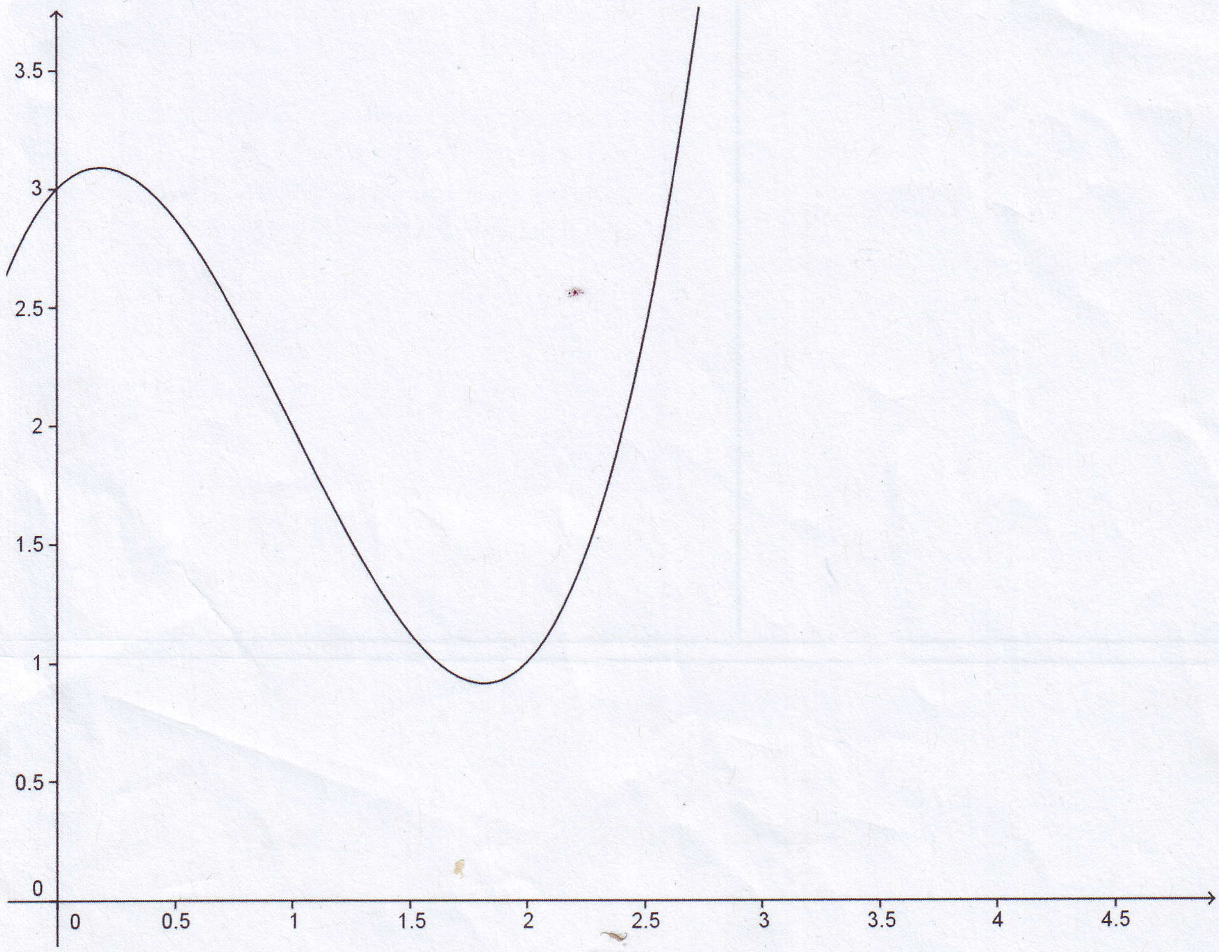
1) A partir de la courbe représentative de C donnée en annexe, conjecturer la convexité de C .
   C a-t-elle un point d'inflexion ?
2) Par le calcul retrouver les résultats de 1).
3) Préciser les coordonnées de l'éventuel point d'inflexion.
4) Déterminer une équation de la tangente au point d'inflexion et la tracer.

Partie B

On note f la fonction définie sur [0.5 ; 2.5] par $f(x) = \dfrac{C(x)}{x}$

1) Calculer f'(x) et vérifier que f'(x) est du signe de $2x^3 - 3x^2 - 3$
2) Question de recherche
   Démontrer que l'équation $2x^3 - 3x^2 - 3 = 0$ n'a qu'une seule solution, notée α, sur [0,3]
   et déterminer le signe de $2x^3 - 3x^2 - 3$ sur [0.5 ; 2.5]
   Encadrer α à 0.01 près.
3) Dresser le tableau de variations complet de f sur [0.5 ; 2.5]

ANNEXE A rendre



Exercice 2

On se donne les fonctions f et g définies sur $]1 ; 10]$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x \text{ et } g(x) = \frac{1}{x-1}$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes des fonctions f et g dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. En utilisant la calculatrice déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sur $]1 ; 10]$ et une valeur approchée au millième des solutions.

2. Vérifier que, pour tout x de $]1 ; 10]$,

$$f(x) - g(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x - 1}$$

3. On pose pour tout réel x de $]1 ; 10]$,

$$h(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$$

a. Étudier le sens de variation de la fonction h.

b. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur $]1 ; 10]$.

c. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sur $]1 ; 10]$.

Exercice 3

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2 ; 4]$.

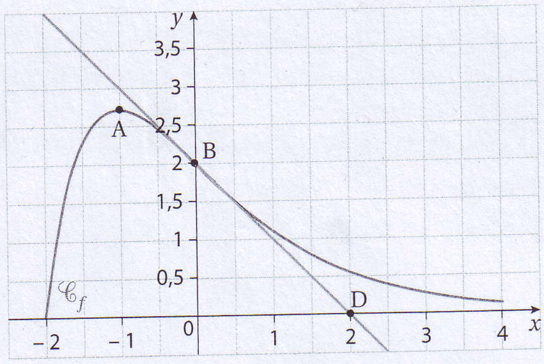
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

La courbe $\mathscr{C}_f$, tracée ci-dessous, représente la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points $B(0 ; 2)$ et A d'abscisse -1.

Elle admet au point A une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

La tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B passe par le point $D(2 ; 0)$ et traverse la courbe en B.



1. En utilisant les données graphiques, indiquer :

a. le nombre de solutions sur l'intervalle $[-2 ; 4]$ de l'équation $f(x) = 1$ et un encadrement d'amplitude 0,5 des solutions éventuelles ;

b. la valeur de $f'(-1)$;

c. l'équation de T ;

d. la valeur de $f'(0)$;

e. le signe de la dérivée f' de la fonction f sur l'intervalle $[-2 ; 4]$;

f. si la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion ;

g. la convexité de la fonction f.

2. Parmi les 3 courbes suivantes quelle est celle qui peut représenter la courbe de la dérivée f' de f ?