Contrôle 4 Décembre 2016 Tle ES

Exercice 1

On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}, \quad g(x) = -x + 1 \quad \text{et} \quad h(x) = f(x) - g(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et Δ la droite représentant la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

Position relative de $\mathscr{C}_f$ et de l'une de ses tangentes.

1. Vérifier, par le calcul, que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est la droite Δ.

2. **a.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.

b. Étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.

c. En déduire le sens de variation de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

3. En utilisant les questions 1. et 2., étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 2

Une entreprise fabrique des poulies utilisées dans l'industrie automobile. On suppose que toute la production est vendue.

L'entreprise peut fabriquer entre 0 et 3 600 poulies par semaine. On note x le nombre de milliers de poulies fabriquées et vendues en une semaine. (x varie donc dans l'intervalle $[0; 3{,}6]$).

Le bénéfice hebdomadaire est noté $B(x)$, il est exprimé en milliers d'euros.

L'objet de cet exercice est d'étudier cette fonction B. Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A : étude graphique

On a représenté en annexe 2 la fonction B dans un repère du plan.

Chaque résultat sera donné à 100 poulies près ou à cent euros près suivant les cas.

Les traits utiles à la compréhension du raisonnement seront laissés sur le graphique et une réponse écrite sur la copie sera attendue pour chaque question posée.

1. Déterminer dans quel intervalle peut varier le nombre de poulies pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 13 000 €.
2. Quel est le bénéfice maximum envisageable pour l'entreprise ?
   Pour quelle nombre N de poulies fabriquées et vendues semble-t-il être réalisé ?

Partie B : étude théorique

Le bénéfice hebdomadaire noté $B(x)$, exprimé en milliers d'euros vaut

$$B(x) = -5 + (4 - x)\,\mathrm{e}^{x}$$

1. (a) On note B' la fonction dérivée de B.
   Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $I = [0; 3{,}6]$, on a : $B'(x) = (3 - x)\,\mathrm{e}^{x}$.

   (b) Déterminer le signe de la dérivée B' sur l'intervalle I.

   (c) Dresser le tableau de variation de la fonction B. On indiquera les valeurs de la fonction B aux bornes de l'intervalle.

2. (a) Justifier que l'équation $B(x) = 13$ admet deux solutions x_1 et x_2, l'une dans l'intervalle $[0; 3]$ et l'autre dans l'intervalle $[3; 3{,}6]$.

   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 0,01 près de chacune des deux solutions.

Exercice 3

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang.
On obtient la courbe fournie en annexe. 3

A. Étude graphique

Avec la précision permise par le graphique, indiquer :

1. la concentration à l'instant initial ;
2. l'intervalle de temps pendant lequel la concentration est supérieure ou égale à 0,4 gramme par litre.
   On fera apparaitre sur le graphique les traits de construction nécessaires.

B. Étude théorique

On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 15]$ par :

$$f(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-0,5x}$$

où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Justifier que $f'(x) = -0,5x\,\mathrm{e}^{-0,5x}$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 15]$.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 0,1$ admet une unique solution a sur l'intervalle $[0; 15]$.
3. Déterminer un encadrement de a d'amplitude un dixième.
4. Un logiciel de calcul formel donne le résultat ci-dessous :

1	`deriver((x+2)*exp(-0.5*x))`
	`exp(-0.5)-0.5*exp(-0.5*x)*(x+2)`
2	`deriver(exp(-0.5)-0.5*exp(-0.5*x)*(x+2))`
	`-exp(-0.5*x)+0.25*exp(-0.5*x)*(x+2)`
3	`factoriser(-exp(-0.5*x)+0.25*exp(-0.5*x)*(x+2))`
	`(0.25*x-0.5)*exp(-0.5*x)`

   En vous appuyant sur ces résultats, étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0; 15]$ et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion.

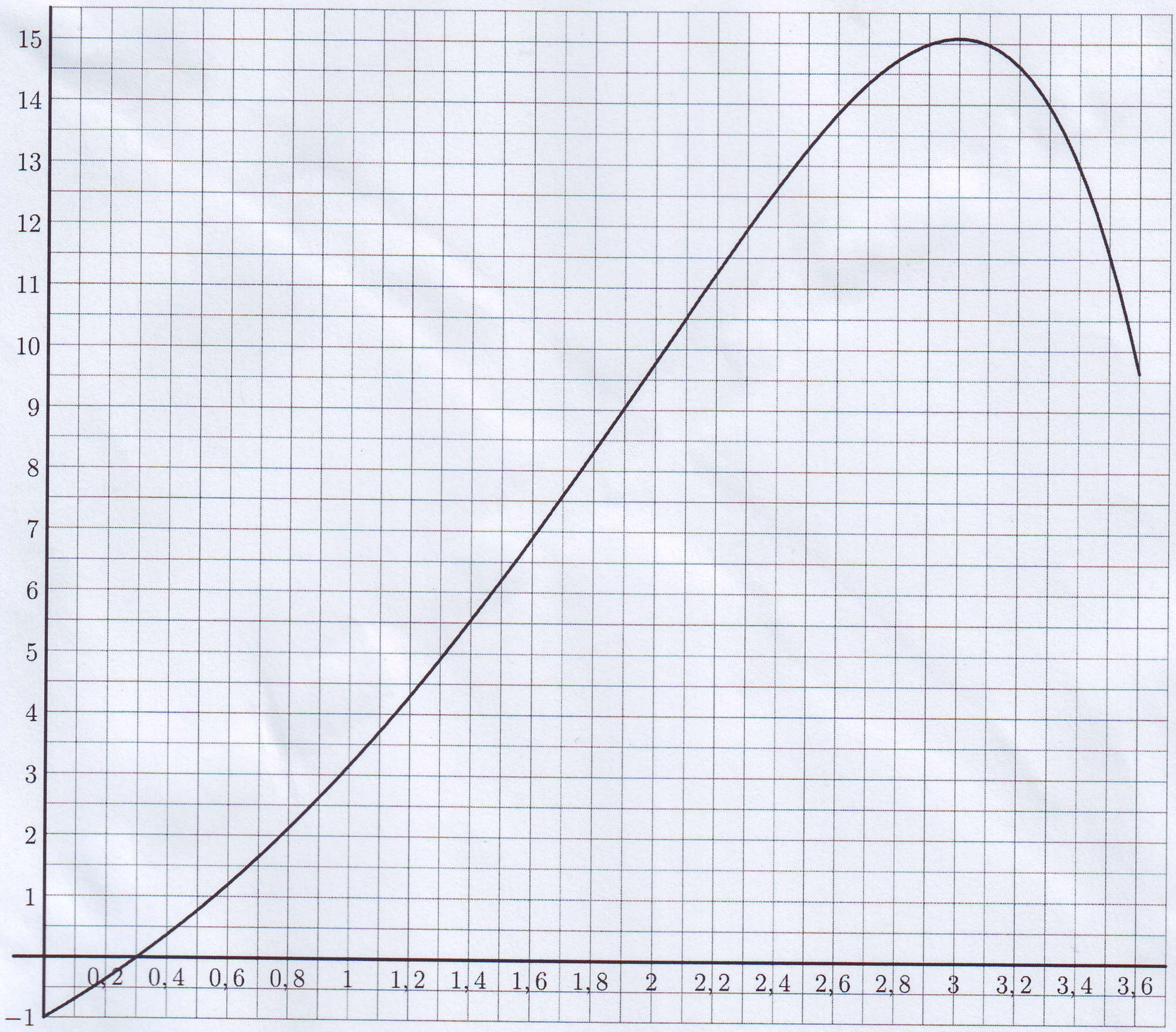
C. Interprétation des résultats

En vous aidant des résultats obtenus, soit dans la partie **B**, soit par lecture graphique et sans justifier, répondre aux questions ci-dessous.

1. On estime que le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à 0,1 gramme par litre. Pendant combien de temps le médicament est-il actif ?
2. Au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle ?

Tale ES NOM :

Annexe à rendre avec la copie (exercice 2)



Annexe 3 (exercice 3)