

Exercice 1

Lors d'un examen, Julien doit répondre un Q.C.M.

À chaque question trois réponses sont proposées dont une seule est exacte.

Pour chaque question, soit il connaît la réponse et répond de façon exacte, soit il ne la connaît pas et, dans ce cas, bien qu'il ait la possibilité de ne pas répondre, il préfère tenter sa chance et répond au hasard il a alors une chance sur trois que sa réponse soit exacte.

On suppose, de plus, que la probabilité que Julien connaisse la réponse à une question donnée est égale $\frac{1}{2}$.

On note C l'évènement « Julien connaît la réponse »,
E l'évènement « la réponse est exacte ».

Rappel de notation : pour un évènement A donné, $p(A)$ désigne la probabilité de l'évènement A et \bar{A} l'évènement contraire de l'évènement A.

1.
 - a. Julien répond une question du Q.C.M.
Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
 - b. Démontrer que : $p(E) = \frac{2}{3}$.
 - c. Calculer la probabilité que Julien connaisse la réponse à la question sachant que sa réponse est exacte.

2. Le Q.C.M. est composé de trois questions indépendantes. Il est noté sur 3 points. Une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse enlève 0,5 point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée l'exercice est 0. Soit X la note obtenue par Julien ce Q.C.M.
 - a. Déterminer la loi de probabilité de X. On pourra s'aider d'un arbre. Les résultats seront donnés sous forme de fractions.
 - b. Quelle est la probabilité que Julien ait au moins 1,5 point ce Q.C.M. ?

EXERCICE 2

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune.

La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.

La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.

Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.

La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1 € et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Soient E et F les événements :

E : « à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges »

F : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».

Montrer que $p(E) = 0,02$ et $p(F) = 0,17$.

3. Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 € ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 € ; sinon il ne reçoit rien.

X désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (rappel le joueur mise 1 €).

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X et en donner une interprétation.

4. Le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2)

a. Démontrer que la probabilité p_n qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que $p_n = 1 - (0,9)^n$.

b. Justifier que la suite de terme général p_n est convergente et préciser sa limite. (Déterminer la limite de p_n)

c. Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0,9$?