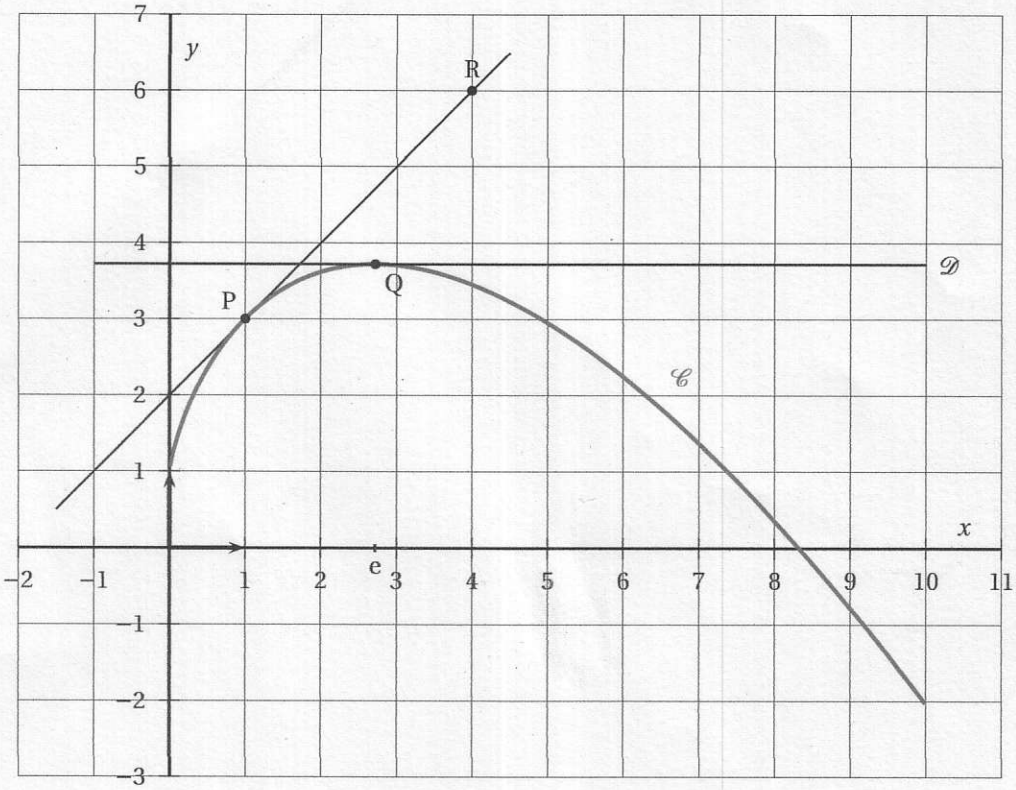
ES Mai 2018 (2215)

Exercice 1 (7 points)

Commun à tous les candidats

La courbe $\mathscr{C}$ tracée ci-dessous dans un repère orthonormé d'origine O est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.



On considère les points P(1 ; 3) et R(4 ; 6). Le point Q a pour abscisse e, avec $e \approx 2,718$.
Les points P et Q appartiennent à la courbe $\mathscr{C}$. La droite $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des abscisses et passe par le point Q.
La droite (PR) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point P et la droite $\mathscr{D}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point Q.
On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, les résultats seront donnés à l'aide d'une lecture graphique et sans justification.

1. Parmi les trois propositions ci-dessous, quelle est celle qui désigne l'équation de la droite (PR) ?

   a. $y = 2x + 1$ **b.** $y = x + 2$ **c.** $y = 2x + 2$

2. Donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
3. Une seule de ces trois propositions est exacte :
   a. f est convexe sur l'intervalle $]0\,;\,10]$;
   b. f est concave sur l'intervalle $]0\,;\,10]$;
   c. f n'est ni convexe ni concave sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.
   Laquelle ?
4. Encadrer l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ par deux entiers consécutifs.

Partie B

La courbe $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;10]$ par :

$$f(x) = -x\ln x + 2x + 1.$$

1. **a.** Calculer $f'(x)$.
   b. Démontrer que la fonction f admet un maximum sur l'intervalle $]0\,;10]$.
   c. Calculer la valeur exacte du maximum de la fonction f sur ce même intervalle.
2. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes sur l'intervalle $]0\,;10]$.
3. On admet que la fonction F définie par $F(x) = -\dfrac{x^2}{2}\ln x + \dfrac{5}{4}x^2 + x - 7$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;10]$.
   Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 2 **(6 points)**

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Dans cet exercice, on étudie le tirage moyen journalier des quotidiens français d'information générale et politique, c'est-à-dire le nombre moyen d'exemplaires imprimés par jour.
Le tableau suivant donne, entre 2007 et 2014, pour chaque année ce tirage moyen journalier, en milliers d'exemplaires :

Année	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Tirage moyen journalier en milliers d'exemplaires	10 982	10 596	10 274	10 197	10 182	9 793	9 321	8 854

Source : D.G.M.I.C (Direction générale des médias et des industries culturelles)

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis si nécessaire au centième.

1. Calculer le taux d'évolution du tirage moyen journalier entre 2007 et 2008.

   Pour tout entier naturel n, on note V_n le tirage moyen journalier, en milliers d'exemplaires, de l'année $(2007+n)$.
   On modélise la situation en posant : $V_0 = 10982$ et, pour tout entier naturel n,

$$V_{n+1} = 0,96V_n + 100.$$

2. Calculer V_1 puis V_2.
3. Soit (W_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $W_n = V_n - 2500$.
   a. Montrer que (W_n) est une suite géométrique de raison 0,96 puis déterminer son premier terme.
   b. Déterminer l'expression de W_n en fonction de n.
   c. En déduire que pour tout entier naturel n, $V_n = 8482 \times 0,96^n + 2500$.
4. **a.** Déterminer le tirage moyen journalier prévu selon ce modèle pour l'année 2017.
   b. Déterminer la limite de la suite (W_n). ~~Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.~~
   Supprimée (**c.** ~~Proposer un algorithme affichant le tirage moyen journalier, à partir de 2007 jusqu'à l'année $(2007+n)$, pour un nombre d'années n saisi par l'utilisateur.~~

EXERCICE 3 (7 points)

Commun à tous les candidats

Chaque année, les organisateurs d'une course de montagne proposent trois parcours de difficulté croissante : vert, bleu et rouge.
Les organisateurs ont constaté que 50 % des coureurs choisissent le parcours vert, 30 % choisissent le parcours bleu, le reste des coureurs choisit le parcours rouge.
Ils ont également constaté, en observant les années précédentes, que :

- 3,2 % de l'ensemble des coureurs abandonnent la course ;
- 2 % des coureurs du parcours vert abandonnent la course ;
- 5 % des coureurs du parcours rouge abandonnent la course.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre quelconque.

Partie A

À la fin de la course, on choisit au hasard un des participants de telle façon que tous ont la même probabilité d'être choisis. On note :

- V l'évènement « Le coureur a choisi le parcours vert » ;
- B l'évènement « Le coureur a choisi le parcours bleu » ;
- R l'évènement « Le coureur a choisi le parcours rouge » ;
- A l'évènement « Le coureur a abandonné la course ».

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.

2. Calculer la probabilité de l'évènement $V \cap A$. ~~Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.~~

3. Un coureur se blesse et abandonne la course. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi le parcours vert ?

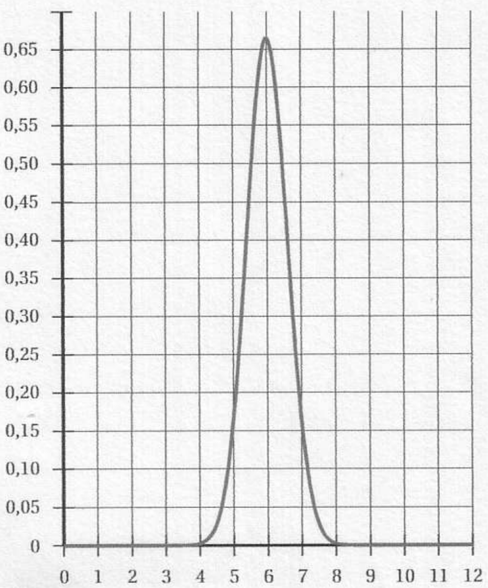
4. Démontrer que $P(B \cap A) = 0,012$.

5. En déduire la probabilité $P_B(A)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

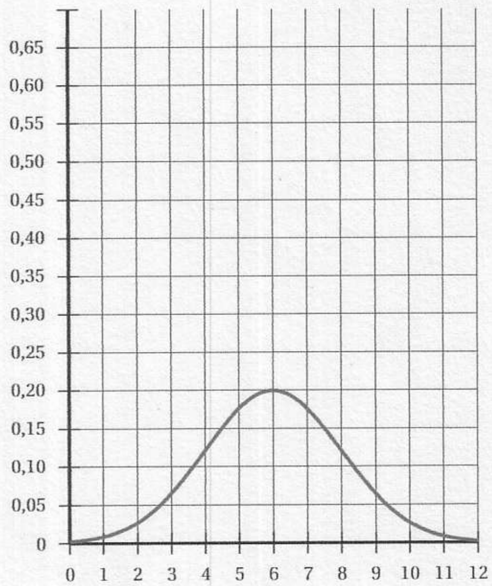
Partie B

Le temps hebdomadaire d'entraînement des coureurs du parcours rouge, exprimé en heure, peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale dont l'espérance est de 6 heures et l'écart type est de 2 heures.

1. Lequel des deux graphiques suivants, graphique 1 ou graphique 2, représente la fonction de densité de la loi normale de paramètres $\mu = 6$ et $\sigma = 2$? Justifier la réponse.



graphique 1



graphique 2

2. Un magazine spécialisé interroge au hasard quelques participants du parcours rouge afin de mener une enquête sur la durée de leur entraînement. On arrondira les résultats au millième.

a. Quelle est la probabilité d'interroger un coureur dont la durée d'entraînement est comprise entre 5 h et 7 h ?

b. Quelle est la probabilité d'interroger un coureur dont la durée d'entraînement est inférieure à 4 h ?