(1A) Correction du contrôle 1 septembre 2017 Te ES

Ex 1

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $p_{n+1} = p_n + 20\%$ de $p_n = 1{,}2\, p_n$

$q_{n+1} = q_n - 17\%$ de $q_n = 0{,}83\, q_n$

Donc (p_n) est géométrique de raison $\boxed{1{,}2}$ et de 1er terme 8

(q_n) est géométrique de raison $\boxed{0{,}83}$ et de 1er terme 500

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $p_n = p_0 \times 1{,}2^n = \boxed{8 \times 1{,}2^n}$

$q_n = q_0 \times 0{,}83^n = \boxed{500 \times 0{,}83^n}$

(p_n) croissante et $\lim (p_n) = +\infty$ $\boxed{\text{car } 1{,}2 > 1}$ et $\boxed{p_0 > 0}$

(q_n) décroissante et $\lim (q_n) = 0$ $\boxed{\text{car } 0 < 0{,}83 < 1}$ et $\boxed{q_0 > 0}$

c) $r_n = p_n \times q_n = 8 \times 500 \times 1{,}2^n \times 0{,}83^n = 4\,000 \times (1{,}2 \times 0{,}83)^n = \boxed{4000 \times 0{,}996^n}$

(r_n) est géométrique de raison $q = 0{,}996 < 1$ et de 1er terme $4000 > 0$

donc (r_n) décroît.

$\boxed{\text{L'artisan a tort}}$

d) On calcule $r_0 + \ldots + r_9 = 4000(1 + 0{,}996 + \ldots + 0{,}996^9)$

$= 4000\left(\dfrac{1 - 0{,}996^{10}}{1 - 0{,}996}\right) \simeq \boxed{39\,290\ €}$

Bonus En s'inspirant de c) il faudrait que la raison de (r_n) soit 1

donc $1{,}2 \times q = 1$ où q est la raison de (q_n)

on obtient $q \simeq 0{,}833$ soit une baisse d'à peu près $\boxed{16{,}7\%}$

Ex 2

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n - 10\%$ de $u_n + 100 = \boxed{0{,}9\, u_n + 100}$

2) $v_n = u_n - 1000 \iff u_n = v_n + 1000$

a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 1000$

$= 0{,}9 u_n + 100 - 1000$

$= 0{,}9 u_n - 900$

$= 0{,}9(v_n + 1000) - 900$

$= 0{,}9 v_n + 900 - 900$

$= \boxed{0{,}9 v_n}$ et cela pour tout $n \in \mathbb{N}$

(v_n) est donc géométrique de $\boxed{\text{raison } 0{,}9}$

b) Pour tout n, $v_n = v_0 \times 0{,}9^n = \boxed{500 \times 0{,}9^n}$ car $v_0 = u_0 - 1000 = 500$

et donc $u_n = v_n + 1000 = \boxed{500 \times 0{,}9^n + 1000}$

4) Il s'agit de résoudre $\boxed{u_n \leq 1200}$ (ou encore $0{,}9^n \leq 0{,}4$)

Avec la calculatrice on trouve $\boxed{n \geq 9}$, soit à partir de $\boxed{2014}$