Contrôle 5 Janvier 2017 Tle ES

Exercice 1

A] Voir annexe 1

B] 1) $C'(x) = 2x - 2\left(1\times\ln x + \frac{1}{x}\times x\right) = 2x - 2\ln x - 2$

Donc $C'(x) = 2(x - \ln x - 1)$

2) $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ qui est du signe de $x-1$ car $x>0$

x	$0{,}25$		1		5
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$g(1) = 1 - \ln 1 - 1 = 0$

3)

x	$0{,}25$		1		5
$g(x)$		$+$	0	$+$	
$C'(x) = 2g(x)$		$+$	0	$+$	
C		$\nearrow$		$\nearrow$	

C strictement croissante

C] 1) T a pour équation $y = f'(2)(x-2) + f(2)$ $\quad f'(2) = 2(2-\ln 2 - 1) = 2 - 2\ln 2$

$f(2) = 4 - 4\ln 2$

$= (2-2\ln 2)(x-2) + 4 - 4\ln 2$

$= (2-2\ln 2)x - 4 + 4\ln 2 + 4 - 4\ln 2$

$y = (2-2\ln 2)x$

2) Donc (T) passe par l'origine (voir annexe) et par A. ($2-2\ln 2 \simeq 0{,}61$ correspond au p du A] 2))

D] 1) $B(x) = 1{,}5x - x^2 + 2x\ln x \quad (R(x) - C(x))$

$B'(x) = 1{,}5 - C'(x) = 1{,}5 - 2(x - \ln x - 1)$

$= 1{,}5 - 2x + 2\ln x + 2$

$= 2\ln x - 2x + 3{,}5$

2) Sur $[0{,}25 ; 1]$ $B'(x) = 0$ n'a pas de solution, car sa valeur minimale est $0{,}22$

Sur $[1;5]$, B' est continue et strictement décroissante, et $0 \in [-3{,}28 ; 1{,}5]$,

donc l'équation $B'(x) = 0$ n'a qu'une seule solution, α, dans $[1;5]$

d'après le théorème des valeurs intermédiaires

On a $2{,}7 < \alpha < 2{,}8$ avec la calculatrice

x	$0{,}25$		α		5
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
B		$\nearrow$		$\searrow$	

α est donc la valeur de x pour laquelle l'entreprise réalise un bénéfice maximum

Exercice 2

1) $f'(x) = 20\left(\frac{\frac{1}{x}\times x - 1\times \ln x}{x^2}\right) = 20\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)$

2) $f'(x)$ est du signe $1-\ln x$ car $x^2>0$

$1-\ln x = 0$ $\quad$ $1-\ln x \geq 0$

$\Leftrightarrow \ln x = 1$ $\quad$ $\Leftrightarrow \ln x \leq 1$

$\Leftrightarrow x = e$ $\quad$ $\Leftrightarrow x \leq e$

x	1		e		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{20}{e}$	$\searrow$	$2\ln 10$

$f(1) = \frac{20\ln 1}{1} = 0$

$f(e) = \frac{20\ln e}{e} = \frac{20}{e}$

$f(10) = 20\frac{\ln 10}{10} = 2\ln 10$

3) Voir annexe

4) Etudions le signe de $f''(x)$

$-3+2\ln(x) = 0$ $\quad$ $-3+2\ln(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow 2\ln(x) = 3$ $\quad$ $\Leftrightarrow 2\ln(x) \geq 3$

$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{3}{2}$ $\quad$ $\Leftrightarrow \ln(x) \geq \frac{3}{2}$

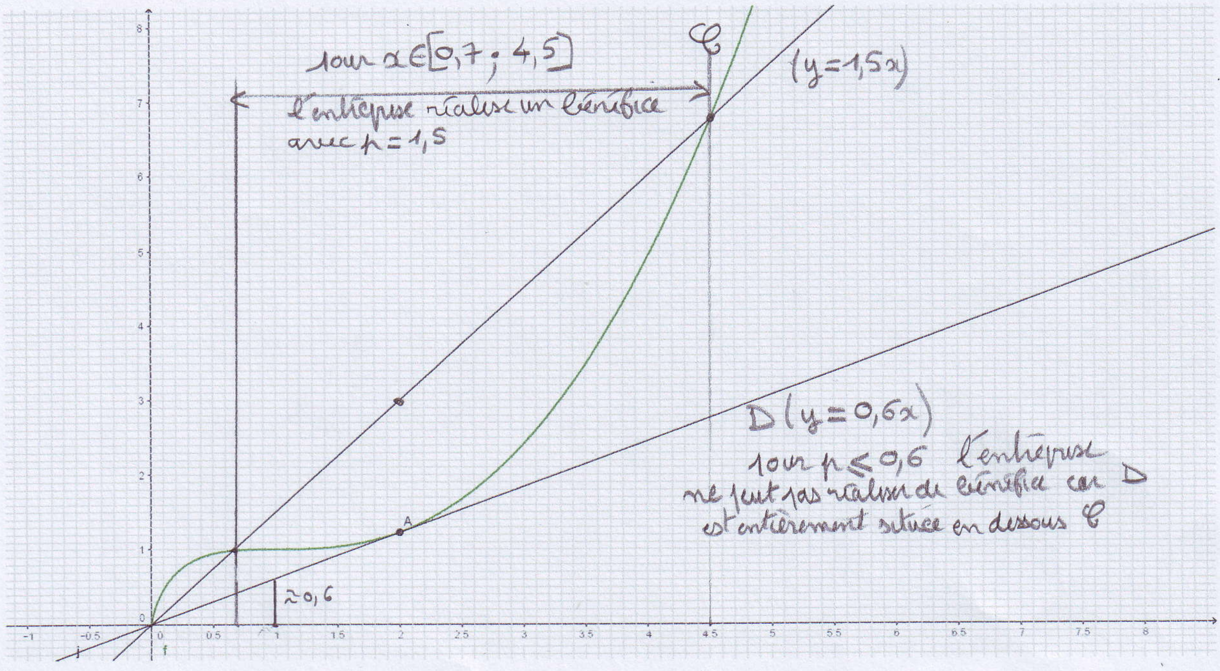
$\Leftrightarrow x = e^{3/2} \approx 4,48$ $\quad$ $\Leftrightarrow x \geq e^{3/2}$

x	1		$e^{3/2}$		10
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		concave		convexe	

Point d'inflexion de coordonnées $\left(e^{3/2}, f(e^{3/2})\right)$

et $f(e^{3/2}) = 20\times\frac{\ln(e^{3/2})}{e^{3/2}} = \frac{20\times\frac{3}{2}}{e^{3/2}} = \frac{30}{e^{3/2}} \approx 6,69$

Annexe1



Annexe 2