

**Exercice 1 -****Partie I.**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = 2x - \ln x + 1$ .

1. Etudier les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
2. Etudier les variations de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .
3. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
4. On admet que pour tout réel  $x$  strictement positif :  $x \geq \ln x$ .  
En déduire que pour tout réel  $x$  strictement positif :  $f(x) \geq x + 1$ .

**Partie II.**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_1 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $u_{n+1} = 2u_n - \ln(u_n) + 1$ .

1. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $u_n \geq n$ .
2. A l'aide de la calculatrice conjecturer le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .  
Démontrer cette conjecture.
3. Démontrer que la suite  $(u_n)$  a pour limite  $+\infty$ .

**Partie III.**

On considère l'algorithme suivant :

|                         |                                                                                                    |
|-------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Entrée :</b>         | A : réel.<br>Fonction $f : x \mapsto 2x - \ln x + 1$ .                                             |
| <b>Initialisation :</b> | Demander à l'utilisateur la valeur de A.<br>Affecter la valeur 1 à U.<br>Affecter la valeur 1 à N. |
| <b>Traitement :</b>     | Tant que $U < A$ .<br>Affecter à N la valeur $N + 1$ .<br>Affecter à U la valeur $f(U)$ .          |
| <b>Sortie :</b>         | Afficher N.                                                                                        |

Pour les questions suivantes on s'appuiera sur la partie II.

1. Qu'affiche cet algorithme lorsqu'on saisit une valeur de A inférieure ou égale à 1 ? Justifier.
2. Qu'affiche cet algorithme lorsqu'on saisit  $A = 10^4$  ?  
Justifier à l'aide de la calculatrice.
3. Justifier que, quelle que soit la valeur attribuée à A, l'algorithme se termine.  
Interpréter alors la valeur affichée en sortie.



## EXERCICE 2

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune.

La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.

La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.

Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.

La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1 € et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Soient E et F les événements :

E : « à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges »

F : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».

Montrer que  $p(E) = 0,02$  et  $p(F) = 0,17$ .

3. Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 € ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 € ; sinon il ne reçoit rien.

X désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (rappel le joueur mise 1 €).

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X et en donner une interprétation.

4. Le joueur décide de jouer  $n$  parties consécutives et indépendantes ( $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2)

a. Démontrer que la probabilité  $p_n$  qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que  $p_n = 1 - (0,9)^n$ .

b. Justifier que la suite de terme général  $p_n$  est convergente et préciser sa limite.

c. Quelle est la plus petite valeur de l'entier  $n$  pour laquelle  $p_n > 0,9$  ?