Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2+\cos x)e^{1-x}$.
On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) > 0$.
2. **a.** Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$.

   b. En déduire que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $2 + \cos x + \sin x > 0$.

   c. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. **a.** Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $e^{1-x} \leqslant f(x) \leqslant 3e^{1-x}$.

   b. En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   c. Interpréter géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.
4. **a.** Montrer que, sur l'intervalle $[0\,;\pi]$, l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α.

   b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Exercice 2

Dans cet exercice, pour chaque question, une affirmation est proposée. On demande d'indiquer sur la copie si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte,mais toute trace de recherche sera valorisée.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère trois points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3},\ z_{\mathrm{B}} = 1 + \mathrm{i}, \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{C}} = 2\mathrm{i}\left(\cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

1. **Proposition 1 :** $\arg(z_{\mathrm{C}}) = \dfrac{\pi}{12}$.
2. **Proposition 2 :** L'écriture algébrique de $\dfrac{z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}}}$ est : $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.
3. **Proposition 3 :** L'écriture exponentielle de $\dfrac{z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}}}$ est : $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$.
4. **Proposition 4 :** $(z_{\mathrm{B}})^{20}$ est un nombre réel.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Soit D le point d'affixe $z_{\mathrm{D}} = \overline{z_{\mathrm{C}}}$.

   Proposition 5 : Le quadrilatère ABDC est un trapèze.
6. **Proposition 6 :** $\dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \dfrac{\mathrm{OC}}{\sqrt{2}}$.
7. Soit l'équation (E) : $z^2 - 8z + 64 = 0$.

   Proposition 7 : Les solutions de l'équation (E) sont : $4 - i\sqrt{3}$ et $4 + i\sqrt{3}$.