Janvier 2013

Contrôle n° 5 — Tle S

Exercice 1

Partie A

a. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2-2z+4=0.$$

Les solutions seront notées z' et z'', z' désignant la solution dont la partie imaginaire est positive.

Donner les solutions sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

b. Donner la valeur exacte de $(z')^{2004}$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$; (unité graphique : 2 cm).

Montrer que les points A d'affixe $1+i\sqrt{3}$ et B d'affixe $1-i\sqrt{3}$ sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.

~~Tracer ce cercle puis construire les points A et B.~~

Exercice 2

Soit les nombres complexes :

$$z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{6},\ ,z_2=2+2i \quad \text{et} \quad Z=\frac{z_1}{z_2}.$$

a. Écrire Z sous forme algébrique.

b. Donner les modules et arguments de z_1, z_2 et Z.

c. En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

d. Le plan est muni d'un repère orthonormal ; on prendra 2 cm comme unité graphique.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et Z. Placer le point B, puis placer les points A et C en utilisant la règle et le compas (on laissera les traits de construction apparents).

e. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe Z^{2007}.

Exercice 3

a) Soit Θ un réel.

En utilisant les égalités suivantes :

1) $(e^{i\Theta})^3 = e^{3i\Theta}$

2) $\cos^2\Theta + \sin^2\Theta = 1$

Démontrer que

$\cos(3\Theta) = 4\cos^3\Theta - 3\cos\Theta$.

b) On pose $\Theta = \pi/9$ et $x = \cos(\pi/9)$

Démontrer que x est solution d'une équation du $3^{\text{ième}}$ degré à coefficients entiers

Exercice 4

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. Soient A le point d'affixe $2-5i$ et B le point d'affixe $7-3i$.
   Proposition 1 : Le triangle OAB est rectangle isocèle.
2. Soit (Δ) l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-i| = |z+2i|$.
   Proposition 2 : (Δ) est une droite parallèle à l'axe des réels.
3. Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$.
   Proposition 3 : Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur.
4. Soit z un nombre complexe non nul.
   Proposition 4 : Si $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de z alors $|i+z| = 1+|z|$.
5. Soit z un nombre complexe non nul.
   Proposition 5 : Si le module de z est égal à 1 alors $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ est un nombre réel.