Exercice 1

a) $\forall x \in \mathbb{R}\quad g'(x) = -3x^2 - 3 = -3(x^2+1) < 0 \Rightarrow g$ strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\left[-x^3\left(1+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)\right] = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x^3}\right) = 0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3) = -\infty$

De même $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3) = +\infty$.

On en déduit le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Comme g est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $0 \in g(]-\infty,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$ alors l'équation $g(x)=0$ n'a qu'une seule solution α dans $\mathbb{R}$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires

Avec la calculatrice et par balayage on trouve $-0{,}60 < \alpha < -0{,}59$

b) 1) $\forall x \in]-\infty, 1[\quad f'(x) = \dfrac{(3x^2+2x)(x^3-1) - 3x^2(x^3+x^2)}{(x^3-1)^2} = \dfrac{-x^4-3x^2-2x}{(x^3-1)^2}$

donc $f'(x) = \dfrac{x\,g(x)}{(x^3-1)^2}$

2) $f(x) = \dfrac{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)} = \dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^3}}$ pour $x \neq 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

x	$-\infty$	$\to 1$
x^3-1	$-$ $\to$	0

$\lim\limits_{x\to 1}(x^3+x^2) = 2$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}(x^3-1) = 0^-$ $\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = -\infty$

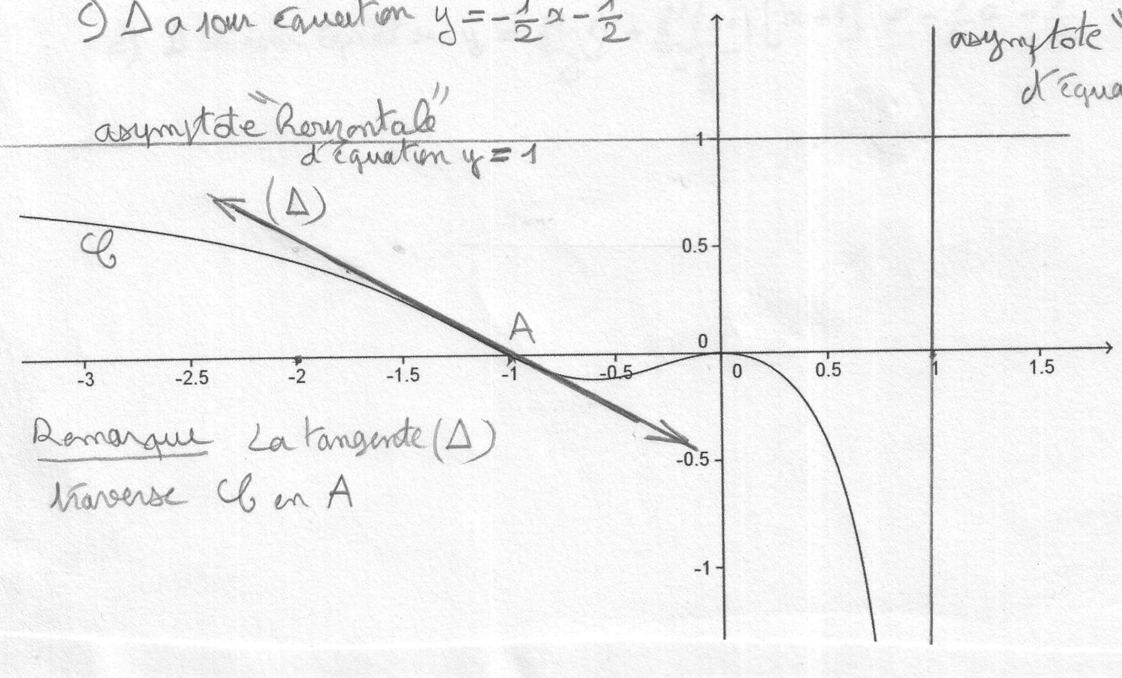
x	$-\infty$		α		0		1
x		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	1	$\searrow$	$-0{,}12$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

car $f'(x)$ est du signe de $x\,g(x)$

$f(\alpha) \simeq -0{,}12$ en prenant $-0{,}6$ pour α

$f(0) = 0$

c) Δ a pour équation $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$



Remarque La tangente (Δ) traverse $\mathscr{C}$ en A

Exercice 2

1) $f'(x) = \frac{1}{10}\left(4x^3+6x^2-24x+14,1\right) \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{10}\left(12x^2+12x-24\right)$

$g'(x) = \frac{1}{10}\left(4x^3+6x^2-24x+13,9\right) \Rightarrow g''(x) = \frac{1}{10}\left(12x^2+12x-24\right)$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = g''(x) = 1,2\left(x^2+x-2\right)$

2) Il semblerait que f et g soient croissantes sur $[0;2]$

3) Nous devons étudier le signe de f' et de g' sur $[0;2]$ et comme cela paraît difficile par le calcul, nous allons étudier les variations de f' et g'

x	0		1		2
$f''(x)$		−	0	+	
f'	1,41	↘	0,01	↗	1,22
$f'(x)$			+		
f			↗		

x	0		α		1		β		2
$g''(x)$			−		0		+		
g'	1,39	↘	0	↘	−0,01	↗	0	↗	1,18
$g'(x)$		+	0	−			0	+	
g		↗		↘				↗	

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		+	0	−	0	+	

$\Delta = 9$

$\forall x \in [0;2]$ $f'(x) \geq 0,01$

$\Rightarrow f'(x) > 0$

$\Rightarrow$ f strictement croissante sur $[0;2]$

sur $[0,1]$ g' continue et strictement décroissante et $0 \in [-0,01 ; 1,39]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g'(x) = 0$ n'a qu'une seule solution notée α sur $[0;1]$

Idem sur $[1;2]$

Le signe de g' s'en déduit aisément ainsi que les variations de g

f est bien strictement croissante sur $[0;2]$

mais pas g