Exercice 1

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=5-\dfrac{4}{x+2}$.

1. $f'(x)=0-\dfrac{0(x+2)-4\times 1}{(x+2)^2}=\dfrac{4}{(x+2)^2}>0$ sur $[0;+\infty[$.

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

2. On résout dans $[0;+\infty[$ l'équation $f(x)=x$:

$$f(x)=x \iff 5-\frac{4}{x+2}=x \iff \frac{5(x+2)-4-x(x+2)}{x+2}=0 \iff \frac{5x+10-4-x^2-2x}{x+2}=0$$

$$\iff \frac{-x^2+3x+6}{x+2}=0 \iff -x^2+3x+6=0 \text{ et } x+2\neq 0$$

On résout $-x^2+3x+6=0$; $\Delta=9-4\times 6\times(-1)=33>0$.

Les solutions sont donc $\dfrac{-3-\sqrt{33}}{-2}=\dfrac{3+\sqrt{33}}{2}$ et $\dfrac{3-\sqrt{33}}{2}$.

Cette deuxième solution est négative donc l'unique solution de l'équation $f(x)=x$ dans l'intervalle $[0;+\infty[$ est $\alpha=\dfrac{3+\sqrt{33}}{2}\approx 4{,}37$.

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.

Sur la figure de **annexe 1**, on place les points M_0, M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2 ; voir page 7.

On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et converge vers α.

4. **a.** Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\alpha$.

- Pour $n=0$, $u_n=u_0=1$ et $u_{n+1}=u_1=f(u_0)=5-\dfrac{4}{1+2}=\dfrac{11}{3}$; de plus $\alpha\approx 4{,}37$.

  On a $0\leqslant 1\leqslant\dfrac{11}{3}\leqslant\alpha$ ce qui veut dire que la propriété est vraie au rang 0.
- On suppose la propriété vraie au rang $p\geqslant 0$, autrement dit : $0\leqslant u_p\leqslant u_{p+1}\leqslant\alpha$.

  On sait d'après la question **1.** que la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$; donc : $0\leqslant u_p\leqslant u_{p+1}\leqslant\alpha\Longrightarrow f(0)\leqslant f(u_p)\leqslant f(u_{p+1})\leqslant f(\alpha)$

  $f(0)=3\geqslant 0$, $f(u_p)=u_{p+1}$ et $f(u_{p+1})=u_{p+2}$.

  De plus, α est solution de l'équation $f(x)=x$ donc $f(\alpha)=\alpha$.

  On a donc $0\leqslant u_{p+1}\leqslant u_{p+2}\leqslant\alpha$; on peut dire que la propriété est vraie au rang $p+1$.
- La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire ; donc la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\alpha$.

b. Pour tout n, $u_n\leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.

Pour tout n, $u_n\leqslant\alpha$ donc la suite (u_n) est majorée par α.

Donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

5. Pour tout entier naturel n, on définit la suite (S_n) par $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

a. $S_0=u_0=1$; $S_1=u_0+u_1=1+\dfrac{11}{3}=\dfrac{14}{3}\approx 4{,}67$

$S_2=u_0+u_1+u_2=S_1+u_2$; $u_2=f(u_1)=f\left(\dfrac{11}{3}\right)=\dfrac{73}{17}$ donc $S_2=\dfrac{14}{3}+\dfrac{73}{17}=\dfrac{457}{51}\approx 8{,}960$ donc $S_2\approx 8{,}96$.

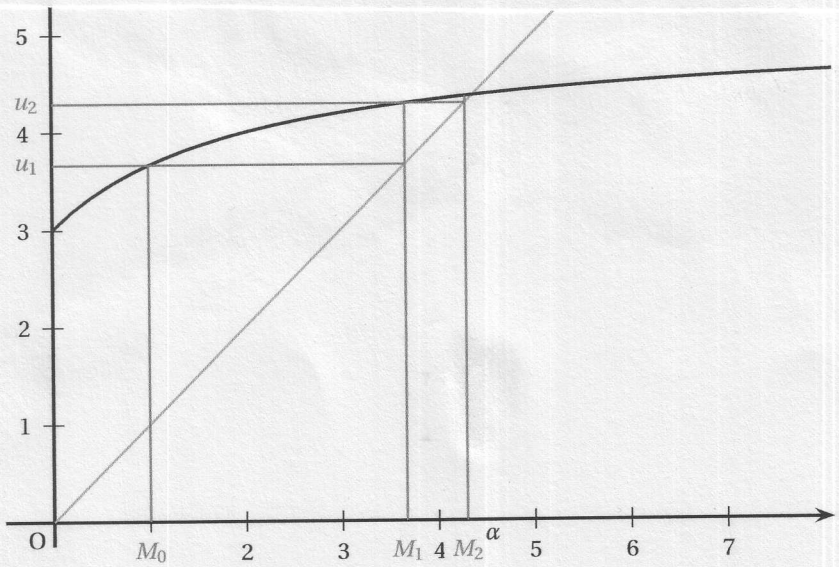
b. On complète l'algorithme donné en annexe 2 pour qu'il affiche la somme S_n pour la valeur de l'entier n demandée à l'utilisateur ; voir page 7.

c. On sait que la suite (u_n) est croissante donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n\geqslant u_0$.

Or $u_0=1$, donc, pour tout n, $u_n\geqslant 1$ et donc $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n\geqslant n+1$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}n+1=+\infty$ donc, d'après les théorèmes de comparaison sur les limites :

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty$$



Exercice 2

1. Nous avons une équation de degré 2, à coefficients réels. On va donc calculer le discriminant Δ du trinôme du second degré.
$\Delta = 4^2 - 4\times 1\times 16 = 16 - 4\times 16 = -3\times 16 = -48$.
Le discriminant étant strictement négatif, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées, qui sont : $Z_1 = \dfrac{-4-\mathrm{i}\sqrt{48}}{2} = \dfrac{-4-4\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = -2-2\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $Z_2 = \overline{Z_1} = -2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$.
Présentons maintenant ces nombres sous leur forme exponentielle, en commençant par calculer le module de Z_1 : $|Z_1| = \sqrt{(-2)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = 4$.
On peut donc écrire : $Z_1 = 4\times\left(\dfrac{-2}{4} + \mathrm{i}\dfrac{-2\sqrt{3}}{4}\right) = 4\times\left(\dfrac{-1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$.
Un argument de Z_1 sera donc un angle dont le cosinus est $\dfrac{-1}{2}$ et le sinus est $\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$, donc $\pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$ dont la mesure principale est $\dfrac{-2\pi}{3}$.
La forme exponentielle de Z_1 est donc : $Z_1 = 4\mathrm{e}^{\frac{-2\mathrm{i}\pi}{3}}$, et puisque Z_2 est le conjugué de Z_1, d'après les propriétés des modules et arguments : $Z_2 = 4\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.
L'équation admet donc deux solutions, qui sous leurs formes exponentielles sont : $Z_1 = 4\mathrm{e}^{\frac{-2\mathrm{i}\pi}{3}}$ et $Z_2 = 4\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.

2. Si a a pour module 2 et pour argument $\dfrac{\pi}{3}$, alors $a = 2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$ et donc, d'après les propriété du module et des arguments, $a^2 = 2^2\mathrm{e}^{2\times\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$, donc on a $a^2 = Z_2$ et donc la forme algébrique de a^2 est $-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$.
Le nombre a est donc une solution à l'équation dont on parle dans cette question. L'autre solution sera donc $-a$, car $(-a)^2 = a^2$, donc si a est une solution, $-a$ en sera une aussi. On va donc présenter les deux solutions sous forme algébrique, comme demandé :
$a = 2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} = 2\times\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $-a = -1+\mathrm{i}\times\left(-\sqrt{3}\right)$.

3. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Il existe donc quatre nombres réels x_1 ; y_1 ; x_2 et y_2 tels que $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ et $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$.
On a alors $z_1 z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2)$
$= x_1x_2 + \mathrm{i}x_1y_2 + \mathrm{i}y_1x_2 + \mathrm{i}^2y_1y_2$
$= (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)$
Comme les nombres x_1, x_2, y_1 et y_2 sont réels, alors on peut définir les nombres $x_3 = x_1x_2 - y_1y_2$ et $y_3 = x_1y_2 + x_2y_1$, qui sont réels également.
On a donc écrit le produit z_1z_2 sous la forme $x_3 + \mathrm{i}y_3$, où x_3 et y_3 sont des nombres réels, donc le conjugué de z_1z_2 est :
$\overline{z_1z_2} = x_3 - \mathrm{i}y_3 = (x_1x_2 - y_1y_2) - \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)$.
Par ailleurs, calculons le produit : $\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (x_1 - \mathrm{i}y_1)\times(x_2 - \mathrm{i}y_2)$
$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = x_1x_2 - \mathrm{i}x_1y_2 - \mathrm{i}y_2x_1 + (-\mathrm{i})^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) - \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1) = \overline{z_1z_2}$
Nous avons donc démontré que pour deux nombres complexes quelconques z_1 et z_2, on a : $\overline{z_1}\,\overline{z_2} = \overline{z_1z_2}$.
La seconde propriété sera démontrée par récurrence. Posons, pour tout entier naturel n non nul la propriété $\mathscr{P}_n$, qui dit que pour tout complexe z, on a $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $z^1 = z$, donc $\overline{z^1} = \overline{z} = \left(\overline{z}\right)^1$: *la propriété $\mathscr{P}_1$ est donc vraie.*
Hérédité : Pour un entier k naturel non nul, on suppose vraie la propriété $\mathscr{P}_k$, c'est à dire que l'on suppose que pour tout complexe z, on a $\overline{z^k} = \left(\overline{z}\right)^k$.
On souhaite maintenant démontrer que si cette propriété est vraie, alors la propriété suivante doit être vraie aussi.
Soit z un nombre complexe. On s'intéresse donc à $\overline{z^{k+1}}$. On a $z^{k+1} = z^k \times z$, donc :

$\overline{z^{k+1}} = \overline{z^k \times z}$
$= \overline{z^k} \times \overline{z}$ application de la propriété précédente.
$= \left(\overline{z}\right)^k \times \overline{z}$ par hypothèse de récurrence.
$= \left(\overline{z}\right)^{k+1}$ ce qui constitue la propriété $\mathscr{P}_{k+1}$.

Nous avons donc démontré que si la propriété $\mathscr{P}_k$ est vraie, cela implique que $\mathscr{P}_{k+1}$ l'est également : *la propriété est héréditaire.*
Conclusion : La propriété est vraie au rang 1 et est héréditaire, donc, on peut donc dire que pour tout entier n naturel non nul, et pour tout nombre complexe z, on a $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

4. Soit z une solution de l'équation (E), cela signifie que l'on a : $z^4+4z^2+16=0$.
Vérifions maintenant si le conjugué de z est une solution de l'équation :

$$\begin{aligned}
\overline{z}^4+4\overline{z}^2+16 &= \overline{z^4}+4\overline{z^2}+16 && \text{dernière propriété démontrée.}\\
&= \overline{z^4}+\overline{4z^2}+16 && \text{première propriété démontrée}\\
& && \text{sachant que } 4=\overline{4}\text{, car 4 est réel.}\\
&= \overline{z^4+4z^2+16} && \text{somme des conjugués.}\\
&= \overline{0} && \text{car } z \text{ est solution de } (E).\\
&= 0 && \text{car 0 est réel, donc est son propre conjugué.}
\end{aligned}$$

On a établi à la question **2.** que les nombres a et $-a$ sont tels que $a^2=Z_2$ et $(-a)^2=Z_2$.
Comme par ailleurs on a dit que Z_2 est solution de l'équation $Z^2+4Z+16=0$, cela signifie que $\left(a^2\right)^2+4\left(a^2\right)+16=0$, donc que $a^4+4a^2+16=0$, donc a est solution de (E) et de la même façon, $-a$ est aussi une solution de cette équation.
En appliquant la propriété démontrée au début de cette question, on en déduit que les nombres $\overline{a}$ et $\overline{-a}$ sont également des solutions à cette équation.
Nous avons donc 4 solutions à l'équation, qui sont distinctes : $a=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$; $-a=-1-\mathrm{i}\sqrt{3}$; $\overline{a}=1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $\overline{-a}=-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$, donc puisqu'il y a au maximum 4 solutions à l'équation, celle ce ne peut avoir d'autre solution que celles trouvées, et donc l'équation (E) a été résolue.