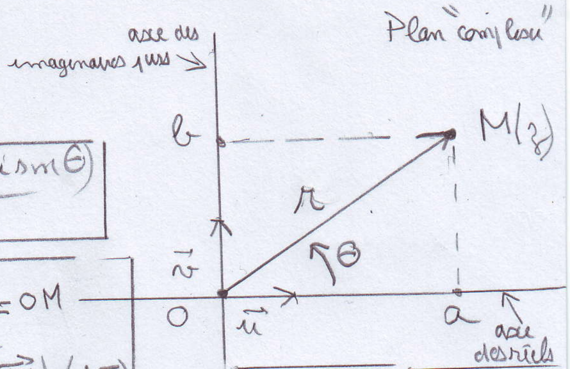
Nombres complexes $\mathbb{C}$

Plan "complexe"



$\boxed{z \in \mathbb{C}}$ → écriture algébrique (unique) $\boxed{z = a + bi}$

→ écriture trigonométrique / exponentielle $\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\theta}}$

↕

M image de z ou z affixe de M $\boxed{M(z)}$

(Repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ orthonormé direct)

$\boxed{\mathbb{R} \subset \mathbb{C}}$

$a = \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$ $\qquad r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} = OM$ le module de z

$b = \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$

$(z \neq 0)$ $\quad \theta = \mathrm{Arg}(z) = (\vec{u}, \vec{OM})\ (2\pi)$ un argument de z (défini à $2k\pi$ près) $k \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$

$\begin{cases} r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{r} \text{ et } \sin\theta = \dfrac{b}{r} \end{cases}$

$e^{i\pi} = -1$

$e^{2i\pi} = 1$

$e^{i\pi/2} = i$

$|e^{i\theta}| = 1$

$\mathrm{Arg}(e^{i\theta}) = \theta$

Si $z \in \mathbb{R}$ $\underset{\text{module}}{|z|} = \underset{\text{valeur absolue}}{|z|}$

Table de multiplication

×	1	i
1	1	i
i	i	$\boxed{-1}$

$\boxed{i^2 = -1}$

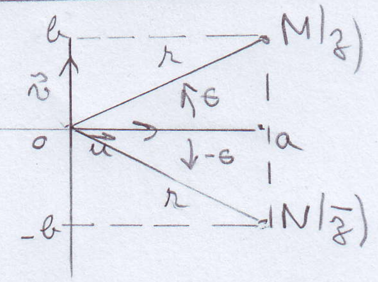
($z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ $\quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ où $r_1 = |z_1| \neq 0$ $\theta_1 = \mathrm{Arg}(z_1)$; $r_2 = |z_2| \neq 0$ $\theta_2 = \mathrm{Arg}(z_2)$)

$z_1 \times z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \Rightarrow |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$; $\mathrm{Arg}(z_1 z_2) \underset{(2\pi)}{=} \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} \Rightarrow \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$; $\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) \underset{(2\pi)}{=} \mathrm{Arg}(z_1) - \mathrm{Arg}(z_2)$

$z_1^n = r_1^n e^{ni\theta_1}$ $\quad n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow |z_1^n| = |z_1|^n$; $\mathrm{Arg}(z_1^n) \underset{(2\pi)}{=} n\,\mathrm{Arg}(z_1)$

Conjugué noté $\bar{z}$



$z = a + bi = r e^{i\theta}$ $\qquad \bar{z} = a - bi = r e^{-i\theta}$

$|z| \neq 0$, $\mathrm{Arg}(z)$

$\bar{\bar{z}} = z$; $z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$

$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ $\qquad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ $\qquad \overline{(z_1^n)} = (\bar{z}_1)^n$ $\quad n \in \mathbb{N}$

$z_2 \neq 0$ $\quad \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$

Racines de $az^2 + bz + c$ où a, b, c sont 3 réels, $a \neq 0$

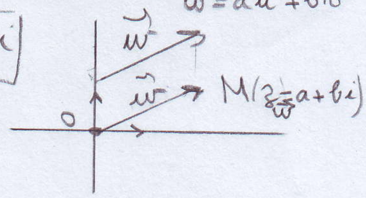
$\Delta = b^2 - 4ac$ → $\Delta \geq 0$ 2 racines réelles | distinctes si $\Delta > 0$ (1°S) ; égales si $\Delta = 0$

↳ $\boxed{\Delta < 0}$ 2 racines complexes conjuguées $\boxed{z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \qquad z_2 = \bar{z}_1}$

Vecteurs

$\vec{w}$ de coordonnées $(a; b)$ a pour affixe $\boxed{z_{\vec{w}} = a + bi}$

$\vec{w} = \vec{OM} \Rightarrow z_{\vec{w}} = z_M$



$\vec{w}_1 = \vec{w}_2 \Leftrightarrow z_{\vec{w}_1} = z_{\vec{w}_2}$

$z_{(\vec{w}_1 + \vec{w}_2)} = z_{\vec{w}_1} + z_{\vec{w}_2}$

$z_{(\lambda \vec{w})} = \lambda z_{\vec{w}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

($z_{\vec{w}}$ signifie affixe du vecteur $\vec{w}$; z_M signifie affixe du point M)

$\|\vec{w}\| = |z_{\vec{w}}|$

$(\vec{u}, \vec{w}) = \mathrm{Arg}(z_{\vec{w}})\ (2\pi)$

$z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$

$AB = |z_B - z_A|$

$(\vec{u}, \vec{AB}) = \mathrm{Arg}(z_B - z_A)\ (2\pi)$

$z_I = \frac{1}{2}(z_A + z_B)$ où I milieu de [AB]